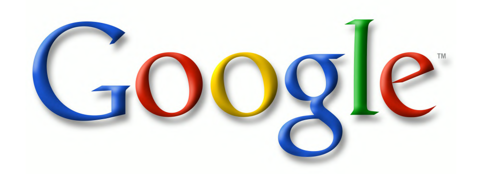
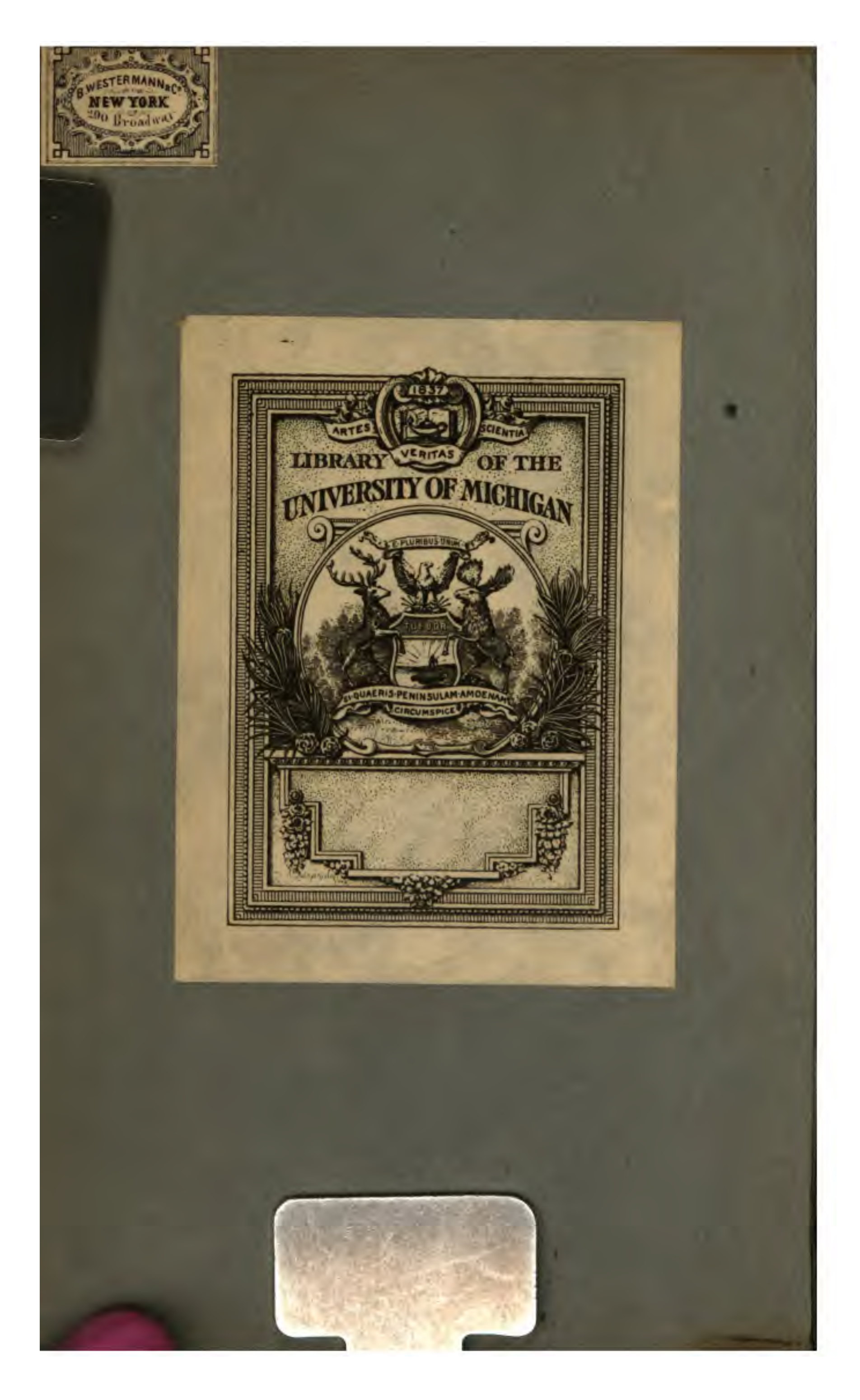



B. WESTERMANN & Co.
NEW YORK
290 Broadway
1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglieb; Ritter des Rothen Abler-Ordens IV. Klasse.

Achter Theil.

Nürnberg, 1851.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Die Lehre
der
endlichen Differenzen und Summen
und
der reellen Faktoriellen und Fakultäten,
so wie
die Theorie der bestimmten Integrale,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens IV. Klasse.

Nürnberg, 1851.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Vorrede.

Nach langer Unterbrechung ist es dem allzuviel beschäftigten Verfasser wiederum möglich geworden, dem Publiko einen neuen Theil seines größeren Lehrbuchs *) zu übergeben. Wer diesen 8ten Theil studiren und etwas daraus lernen will, muß die elementaren Kenntnisse der Differenzial- und Integral-Rechnung mitbringen. Ein solcher Leser wird bei einem gründlichen und langsamen Studiren keine Schwierigkeit finden, sich aber dadurch zum Verstehen der schwierigsten mathematischen Arbeiten der Neuzeit und der interessantesten Anwendungen, genügend vorbereiten können.

Wir erlauben uns aber den geneigten Leser noch auf Einiges aufmerksam zu machen.

Durch die französischen Mathematiker ist es auch in Deutschland Mode geworden, eine endliche oder unendliche Reihe durch ihr allgemeines Glied, dem das Summenzeichen Σ vorgesetzt

*) Der Name „Lehrbuch" sagt zugleich hinlänglich deutlich, daß der Verf. nicht für Mathematiker schreibt, sondern für solche, die es werden wollen. Der Verf. glaubt aber, daß man namentlich aus diesem 8ten und dem folgenden 9ten Theile dieses Werkes (welcher zu Ostern 1852 erscheinen wird) viel lernen könne, und darunter auch Einiges, wodurch die Wissenschaft selbst erweitert worden ist. — Dem Bedürfnisse der Anfänger zu entsprechen, ist stets die wichtigste Aufgabe, welche der Verf. bei Ausarbeitung seiner Lehrbücher sich gesetzt hat und sich setzt.

wird, zu bezeichnen. So findet man also z. B. die Gleichungen (wenn n positiv ganz vorausgesetzt wird)

$$1)\qquad \frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{s=0}^{s=n-1} x^s;$$

$$2)\qquad (a+b)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-s+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots s} a^{n-s}b^s;$$

$$3)\qquad \log(1+z) = \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1}\frac{1}{s}z^s;$$

u. s. w. f. — Eben so kann man noch schreiben

$$4)\qquad Sin\,x = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k+1)};$$

$$5)\qquad Cos\,x = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k)}.$$

Die Gleichungen, welche über und unter dem Buchstaben Σ zu sehen sind, zeigen 1) welcher Buchstabe nach und nach alle ganzen Zahlenwerthe, mit Einschluß oder mit Ausschluß der Null, annehmen soll, und 2) welches die Grenzwerthe dieser Buchstaben s, k, ꝛc. sind. — Der Verf. schreibt dagegen die obigen 5 Gleichungen so:

$$1.\,1.)\qquad \frac{1-x^n}{1-x} = S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-1}{x^{\mathfrak{a}}}\right];$$

$$2.\,2.)\qquad (a+b)^n = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} a^{n-\mathfrak{b}}b^{\mathfrak{b}}\right]\ ^{*)}$$

$$\text{oder auch} = S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}}\right];$$

$$3.\,3.)\qquad \log(1+z) = S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{z^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}+1}\right];$$

$$4.\,4.)\qquad Sin\,x = S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{x^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)!}\right];$$

---

*) Unter $n!$ verstehen wir das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n$; unter $a^{n|r}$ dagegen das Produkt von n Faktoren $a(a+r)(a+2r)\cdots[a+(n-1)r]$

5.5.) $$Cos\,x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right].$$

Daß der Verf. statt des griechischen Buchstaben Σ das lateinische S setzt, ist natürlich etwas ganz gleichgültiges, und ist solches nur geschehen, damit der Buchstabe Σ als stehendes Integrationszeichen endlicher Differenzen-Ausdrücke, wozu es schon früher benutzt worden und so lange schon benutzt wird, nicht zweien Herren zu dienen brauche. Dagegen ist es bei des Verf. bezeichnungsweise wesentlich, daß ein für allemal festgesetzt ist:

1) Jeder kleine deutsche Buchstabe bedeutet stets Null und jede positive ganze Zahl, eine nach der andern bis ins Unendliche fort.

2) Kein anderer als der kleine deutsche Buchstabe wird zu demselben Zwecke verwandt.

3) Die untergesetzten Gleichungen zwischen den kleinen deutschen Buchstaben beschränken der letztern Bedeutung; die Gleichung $a+b = 5$ z. B. zeigt deutlich, daß der Buchstabe b nur die 6 Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 annehmen kann, weil bei jedem größeren Werth von b der andere kleine deutsche Buchstabe a einen negativen Werth erhalten würde (damit $a+b = 5$ seyn könnte), was gegen die Festsetzung 1.) ist.

4) Durch Anwendung dieser beschränkenden Gleichungen wird, in oft sehr verwickelten Rechnungen mit Reihen, eine ungemeine, ja unerwartete Einfachheit möglich.

Näheres hierüber findet sich in der „Theorie der combinatorischen Aggregate", im 2ten Theile (2te Auflage) des Systems der Mathematik. Berlin 1826. Augenblicklich möchte der Verf. durch diese kurze Andeutung nur den Vorwurf von sich ablehnen, als beharre er ohne Ursache auf seiner deutschen Bezeichnungsweise.

Wird endlich statt des S ein P gesetzt, so wird dann das Produkt derselben Glieder verstanden, deren Summe vorher gemeint war.

Durch Cauchy, dessen überlegenem Geiste und der dadurch bei den weniger Kundigen gewonnenen Autorität, es gelungen ist, auch seine zahlreichen Irrthümer besonders in Deutschland einzuschwärzen, ist unter Anderem auch eine Bezeichnung Mode geworden, welcher sich der Verfasser nie anschließen wird. Wir meinen die Schreibweise:

1) $\lim. a^x = 0$, wenn $a{>0 \atop <1}$;

2) $\lim. \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$, wenn x endlich und beliebig reell;

3) $\lim. (z \cdot \log z) = 0$;

u. s. w. f.

Durch die Gleichung 1.) soll ausgedrückt werden, daß der Werth von a^x, wenn a positiv und <1 ist, sich zuletzt immer mehr der Null nähert und ihr unendlich-nahe kommt, je mehr der, stets positiv gedachte Werth von x wächst, und wenn x zuletzt unendlich-groß gedacht wird. — Wir schreiben, um dasselbe auszudrücken, bloß so:

1. 1.) $a^x = 0$ für $x = +\infty$ und $a{>0 \atop <1}$.

Durch die Gleichung 2.) soll ausgedrückt werden, daß, so lange x reell und endlich ist, der Werth von $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ dem Werthe von e^x sich desto mehr nähert, je größer (von einem gewissen ab) der Werth von m (unabhängig vom Vorzeichen) ist, und daß zuletzt beide Werthe einander unendlich-nahe kommen, wenn m (positiv oder negativ, aber abgesehen vom Vorzeichen) zuletzt unendlich-groß gedacht wird. — Wir schreiben, um dasselbe auszudrücken, bloß so:

2.2.) $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$, wenn x reell und endlich und $m = \pm\infty$.

Die Gleichung 3.) will sagen, daß der Werth von $z \cdot log z$ sich der Null desto mehr nähere, je kleiner z ist, wenn nur positiv, und daß $z \cdot log z$ von dem Werthe 0 um unendlich-wenig verschieden sey, wenn z selbst nur noch unendlich-wenig von der Null abweicht. — Dafür schreiben wir bloß, um ganz dasselbe auszudrücken:

3.3.) $z \cdot log z = 0$ für $z = 0$;

und noch besser würde es seyn, wenn man schreiben wollte

$$z \cdot log z = -0 \quad \text{für} \quad z = +0,$$

indem man unter -0 und $+0$ bezüglich $-\frac{1}{\infty}$ und $+\frac{1}{\infty}$ sich dächte.

Wir halten unsere Schreibweise, sobald man sich einmal darüber verständigt hat, für einfacher, entschiedener und verständlicher und werden sie daher, wie bisher, auch hier beibehalten.

Endlich können wir nie zugeben, daß $\frac{1}{0}$ das Unendliche bezeichne, eben so wenig als wir unter $log 0$ das negative Unendliche vorgestellt uns denken können. Diese Formen zeigen im Gegentheil jedesmal eine Ausnahme an, in welcher statt der allgemeinen eine besondere Untersuchung eintreten muß. Betrachten wir z. B. die Funktion $Tg(\frac{1}{2}\pi+x-a)$. Sie nimmt den Werth $+\infty$ an, sobald $x = a-\frac{1}{\infty}$ ist; wächst nun x um unendlich-wenig, so daß $x = a+\frac{1}{\infty}$ wird, so nimmt dieselbe Funktion den Werth $-\infty$ an. Für den Zwischenwerth $x = a$ nimmt sie aber die Form $\frac{Sin\frac{1}{2}\pi}{Cos\frac{1}{2}\pi}$ d. h. die

Form $\frac{1}{0}$ an. Die Tangente von $\frac{1}{2}\pi + x - a$ unterbricht daher für $x = a$ ihr Daseyn; sie existirt als solche gar nicht mehr, und die Ausnahmsform, näher untersucht, lehrt uns bloß, daß jetzt der *Cosinus* $= 0$ und der *Sinus* $= 1$ ist. Wollte man aber mit dem Werthe der $Tg\frac{1}{2}\pi$ (der nach unserer Meinung gar nicht existirt) weiter rechnen, so müßte man $+\infty$ und $-\infty$ zugleich dafür setzen, was doch auch nicht gerathen wäre.

Eben so ist $log\left(+\frac{1}{\infty}\right) = -\infty + 2n\pi \cdot \sqrt{-1}$, worunter ein Werth reell ist und $= -\infty$ (für $n = 0$); dagegen ist $log\left(-\frac{1}{\infty}\right)$ allemal imaginär und $= -\infty + (2n+1)\pi \cdot \sqrt{-1}$. Nun liegt 0 zwischen $+\frac{1}{\infty}$ und $-\frac{1}{\infty}$. Wollte man nun $log\,0$ als das negative Unendliche ansehen, so müßte man sehr im Zweifel seyn, ob man die zum Theil reelle oder die allemal imaginäre Form dafür zu setzen habe.

Wenn ferner aus $ax = b$ gefunden worden ist $x = \frac{b}{a}$, so zeigt, wenn $a = 0$ wird, dies nicht an, daß $x = \infty$ sey, sondern es zeigt den Ausnahmsfall an, in welchem die gegebene Gleichung $ax = b$ in $0 \cdot x = b$ d. h. in $0 = b$ übergeht, den Unbekannten x gar nicht mehr enthält und daher zur Bestimmung dieses letztern auch nicht mehr dient.

Durch diese Betrachtungen glauben wir aber es gerechtfertigt zu haben, wenn wir lieber sagen „die Funktion f_x, welche „für gewisse Werthe von x, die Form $\frac{1}{0}$, oder $log\,0$, oder 0^0 annimmt, unterbreche an diesen Stellen ihr Daseyn", als daß wir sagen möchten, sie unterbreche an diesen Stellen ihre Stetigkeit, um so mehr, als dieses letztere gar nicht immer gleichzeitig der Fall zu seyn scheint, in so ferne z. B. die Funk-

tion $f_x = \frac{1}{(a-x)^2}$, während x alle reellen und wachsenden Werthe von $-\infty$ an durch Null hindurch bis zu $+\infty$ hin erhält, von $+\frac{1}{\infty}$ an stets wächst bis zu $+\infty$ hin $\left(\text{für } x = a-\frac{1}{\infty}\right)$, dann für $x = a$ ihr Daseyn unterbricht, um dann wiederum von $+\infty$ an $\left(\text{für } x = a+\frac{1}{\infty}\right)$ bis zu $+\frac{1}{\infty}$ hin wiederum stetig abzunehmen. Der Werth dieser Funktion f_x geht also von $+\frac{1}{\infty}$ stetig wachsend fort bis zu $+\infty$ hin, um dann von $+\infty$ an wieder bis zu $+\frac{1}{\infty}$ stetig abzunehmen. Nichts destoweniger ist zwischen den beiden Werthen $+\infty$, welche $f_x = \frac{1}{(a-x)^2}$ für $x = a \mp \frac{1}{\infty}$ annimmt, eine Kluft, welche durch den Ausspruch, daß $\frac{1}{0} = \infty$ sey, nicht angezeigt seyn würde.

Was wir aber so eben nur aus dem Gesichtspunkte der Thatsache betrachtet haben, ist im 1ten Theile dieses Werkes genetisch begründet, und in dieser Begründung liegt die Vernunftnothwendigkeit aller späteren Erscheinungen.

Endlich bemerken wir noch, daß dieser 8te Theil auch als ein völlig für sich bestehendes Werk angesehen werden kann, welches aus 4 Abhandlungen besteht, die selber wieder unter sich nur sehr lose zusammenhängen. Zum Verstehen dieses 8ten Theiles braucht man auch nicht die vorhergegangenen 7 Theile studirt zu haben, wenn man nur die Elementarlehren der Differenzial- und Integral-Rechnung irgend woher genommen und sich angeeignet hat. Selbst jede ungewöhnlichere Bezeich-

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens IV. Klasse.

Achter Theil.

Nürnberg, 1851.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

3389.

Die Lehre

der

endlichen Differenzen und Summen

und

der reellen Faktoriellen und Fakultäten,

so wie

die Theorie der bestimmten Integrale,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens IV. Klasse.

Nürnberg, 1851.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Erste Abhandlung.

Altes und Neues von den unendlichen Reihen.

Erstes Kapitel.

Entwickelungen in unendliche Reihen.

Zweites Kapitel.

Einige Methoden der Summation der Reihen.

Drittes Kapitel.

Einige Kennzeichen der Convergenz der Reihen. Von den (Summen-) Werthen convergenter Reihen.

Zweite Abhandlung.

Von den Differenzen- und Summen-Reihen, so wie von der Rechnung mit endlichen Differenzen und Summen.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Dritte Abhandlung.

Theorie der numerisch-bestimmten Integrale.

Siebentes Kapitel.

Vierte Abhandlung.

Theorie der reellen Faktoriellen und Fakultäten, und somit auch der Gamma-Funktionen, d. h. der Euler'schen Integrale zweiter Klasse.

Achtes Kapitel.

Theorie der reellen Fakultäten und Faktoriellen.

§. 101. I. $$a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}}(\nu r)^c$$ (als Definition) *)

für $\nu = \pm\infty$ und ganz, je nachdem $r\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$,

und wenn, wie hier immer vorausgesetzt ist, die Potenz $(\nu r)^c$ ihren positiven Werth vorstellt, und a, c und r beliebig reell sind (ganz oder gebrochen). Darin stecken

II. $$a^{c|-r} = \frac{a^{-\nu|-r}}{(a-cr)^{-\nu|-r}} \cdot (\nu r)^c = \frac{(a+r-cr)^{\nu|r}}{(a+r)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c$$

II. 1. $$a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c$$

wenn r beliebig positiv und $\nu = +\infty$ und ganz;

III. $$c! = 1^{c|1} = \frac{\nu!}{(1+c)^{\nu|1}} \cdot \nu^c$$ für $\nu = \begin{Bmatrix}+\infty\\ \text{und ganz}\end{Bmatrix}$;

III. 1. $$c^{c|-1} = 1^{c|1} = c!$$

§. 102. Wenn a, c, m, n und r beliebig reell sind (ganz oder gebrochen), so hat man:

IV. $$a^{c|r} = [a+(c-1)r]^{c|-r};$$

V. $$a^{m+n|r} = a^{m|r} \cdot (a+mr)^{n|r} = a^{n|r} \cdot (a+nr)^{m|r};$$

und in V. stecken

V. 1. $$a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}};$$

---

*) Ist n positiv ganz, so bedeutet $a^{n|r}$ das Produkt $a(a+r)(a+2r)\cdots(a+nr-r)$. — Ist aber n negativ ganz, so bedeutet $a^{n|r}$ den Quotienten $\frac{1}{(a-r)(a-2r)(a-3r)\cdots(a+nr)}$ (nach §. 99. NN. 1. u. 2.).

V. 2. $a^{1|r} = a;$ also auch $1! = 1;$

V. 3. $a^{0|r} = 1;$ also auch $0! = 1;$

V. 4. $a^{-n|r} = \frac{1}{(a-nr)^{n|r}}$

V. 5. $= \frac{1}{(a-r)^{n|-r}};$

V. 6. $a^{c|r} = a \cdot (a+r)^{c-1|r} = a^{c-1|r} \cdot [a+(c-1)r];$

V. 7. $\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+cr)^{(b-a):r|r}} = \frac{(b+cr)^{(a-b):r|r}}{b^{(a-b):r|r}};$

V. 8. $\frac{a^{b|r}}{a^{c|r}} = (a+cr)^{b-c|r};$

V. 9. $a^{c|1} = \frac{(a+c-1)!}{(a-1)!};$

V. 10. $b! = b \cdot (b-1)!$

V. 11. $(b-1)! = (b-1)^{c|-1} \cdot (b-c-1)!$
$= (b-c-1)!\ (b-c)^{c|1};$

VI. $a^{c|r} = \left(\frac{a}{h}\right)^{c\,r:h} \times h^c,$

wenn h positiv (ganz oder gebrochen) ist und die Potenz h^c ihren positiven Werth vorstellt, während a, c und r beliebig reell (ganz oder gebrochen) gedacht sind.

VI. 2. $a^{c|+r} = r^c \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}+c-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!},$

VI. 3. $a^{c|-r} = r^c \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-c\right)!},$

wenn (in VI. 2. und VI. 3.) r positiv, dagegen a und c beliebig reell gedacht sind.

§. 103.

VII. $$\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{(b-r)^{-c|-r}}{(a-r)^{-c|-r}} = \frac{(b+cr)^{-c|r}}{(a+cr)^{-c|r}} = \frac{(a-r+cr)^{c|-r}}{(b-r+cr)^{c|-r}}$$
$$= \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+cr)^{(b-a):r|r}} = \frac{(a-r+cr)^{(a-b):r|-r}}{(a-r)^{(a-b):r|-r}}$$
$$= \frac{(b+cr)^{(a-b):r|r}}{b^{(a-b):r|r}} = \frac{(b-r)^{(b-a):r|-r}}{(b-r+cr)^{(b-a):r|-r}}.$$

§. 104.

VIII. $$\frac{(b-1)!}{(a-1)!}\cdot \nu^{a-b} = \frac{a^{\nu|1}}{b^{\nu|1}} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty \quad \text{und ganz;}$$

IX. $$a^{\nu|1} = \frac{\nu!}{(a-1)!}\cdot \nu^{a-1} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty \quad \text{und ganz.}$$

§. 105.

X. $$\frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{(b-1)!\;(-b)!}{(a-1)!\;(-a)!} = a^{b-a|1}\cdot(1-a)^{a-b|1}$$
$$= \frac{(+a)^{b-a|+1}}{(-a)^{b-a|-1}} = \frac{a^{b-a|1}}{(1-b)^{b-a|1}} = \frac{(1-a)^{a-b|1}}{b^{a-b|1}}$$
$$= \frac{a^{1-a-b|1}}{b^{1-a-b|1}} = \frac{(1-a)^{a+b-1|1}}{(1-b)^{a+b-1|1}};$$

XI. $$(a-1)!\;(-a)! = \frac{\pi}{Sin\, a\pi};$$

XII. $$(-\tfrac{1}{2})! \quad \text{d. h.} \quad 1^{-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi};$$

XIII. $$(n-\tfrac{1}{2})! = \frac{1^{n|2}}{2^n}\cdot\sqrt{\pi},$$

wenn n beliebig reell ist, ganz oder gebrochen;

XIII. a. $$(+\tfrac{1}{2})! \quad \text{d. h.} \quad 1^{+\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};$$

XIV. $$Tg\, a\pi = \frac{(+a)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-a)^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{(-\frac{1}{2}+a)!\;(-\frac{1}{2}-a)!}{(-1+a)!\quad(-a)!};$$

XV. $$a!\;(-a)! \quad \text{d. h.} \quad 1^{a|1}\cdot 1^{-a|1} = \frac{a\pi}{Sin\, a\pi};$$

XVI. $$(-\tfrac{1}{2}+a)!\;(-\tfrac{1}{2}-a)! \quad \text{d. h.} \quad 1^{-\frac{1}{2}+a|1}\cdot 1^{-\frac{1}{2}-a|1} = \frac{\pi}{Cos\, a\pi};$$

XVII. $$\left(\frac{1}{n}-1\right)!\;\left(\frac{2}{n}-1\right)!\;\left(\frac{3}{n}-1\right)!\;\ldots\;\left(\frac{n-1}{n}-1\right)! = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}.$$

XXV. $S\left[n_{\mathfrak{b}}\, a^{n-\mathfrak{b}|-1} b^{\mathfrak{b}|-1}\right] = (a+b)^{n|-1},$

so oft $a+b+1$ positiv ist;

XXVI. $S\left[n_{\mathfrak{b}} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|1} \cdot b^{\mathfrak{b}|1}\right] = (a+b)^{n|1} \cdot \frac{Sin\, a\pi \cdot Sin\,(a+b+n)\pi}{Sin\,(a+n)\pi \cdot Sin\,(a+b)\pi},$

so oft $a+b-1$ negativ d. h. $1 > a+b$ ist;

XXVII. $$S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot \beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right] = \frac{(\gamma-\alpha)^{\alpha|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\alpha|1}} = \frac{(\gamma-\beta)^{\beta|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\beta|1}}$$
$$= \frac{(\gamma-1)!\ (\gamma-1-\alpha-\beta)!}{(\gamma-1-\alpha)!\ (\gamma-1-\beta)!},$$

so lange $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist;

XXVIII. $$\frac{(a+b)^{n|-1}}{a^{n|-1}} = S\left[\frac{(-n)^{\mathfrak{b}|1}(-b)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (a-n+1)^{\mathfrak{b}|1}}\right],$$

so lange $a+b+1$ positiv ist;

XXIX. $$\frac{(a+b)^{n|1}}{a^{n|1}} = S\left[\frac{(\ n)^{\mathfrak{b}|1} b^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (1-a-n)^{\mathfrak{b}|1}}\right] \times \frac{Sin\,(a+n)\pi \cdot Sin\,(a+b)\pi}{Sin\, a\pi \cdot Sin\,(a+b+n)\pi},$$

so lange $a+b-1$ negativ ist;

XXX. $$S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot \beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)^{\mathfrak{b}|1}}\right] = \frac{Cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\pi}{Cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\pi},$$

wenn nur $1-\alpha-\beta$ beliebig positiv ist;

XXXI. $$S\left[\frac{1^{\mathfrak{b}|2}}{2^{\mathfrak{b}|2}} \cdot \frac{(4\alpha-1)^{\mathfrak{b}|2}}{(2\alpha+1)^{\mathfrak{b}|2}}\right] = Tg\, \alpha\pi$$

so lange $\frac{1}{2}-\alpha$ beliebig positiv ist;

XXXII. $$S\left[\frac{1^{\mathfrak{b}|2}}{2^{\mathfrak{b}|2}} \cdot \frac{(1-4\beta)^{\mathfrak{b}|2}}{(2-2\beta)^{\mathfrak{b}|2}}\right] = Cotg\, \beta\pi,$$

wenn β beliebig positiv ist.

§. 114.

XXXIII. $$\frac{(b+\nu)^{c|\pm1}}{\nu^c} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty;$$

XXXIV. $$\frac{(b+c+\nu-1)!}{\nu^c \cdot (b+\nu-1)!} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty;$$

XXXIVbis. $$\frac{(c+\nu-1)!}{\nu^c \cdot (\nu-1)!} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty.$$

Einleitung.

Damit der Inhalt dieses Bandes auch als ein selbständiges Werk gelesen werden könne, ohne daß der Leser die Vorkenntnisse gerade aus den sieben vorausgegangenen Theilen des „Systems der Mathematik" geschöpft zu haben braucht, stellen wir in dieser Einleitung alles zusammen, was hinsichtlich der Begriffe, der Bezeichnung und der Resultate uns als wissenswürdig erscheint.

Erste Abtheilung.

Begriffe. Bezeichnungen. Ausrechnungen. Allgemeine Ansichten.

§. 1.

Wir bezeichnen allemal:

1) durch $a^{n|r}$ das Produkt $a(a+r)(a+2r)\cdots[a+(n-1)r]$, wenn n positiv ganz ist,

2) durch $a^{m-n|r}$ den Quotienten $\frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}}$,

daher durch $a^{1|r}$ die Basis a selbst,

durch $a^{0|r}$ die 1 (Einheit),

durch $a^{-n|r}$ den Quotienten $\frac{1}{(a-nr)^{n|r}}$;

und wir nennen solche Ausdrücke Faktoriellen, wobei wir jedoch m und n positiv ganz voraussetzen.

Ferner bezeichnen wir

3) durch n! die Faktorielle $1^{n|1}$ oder $n^{n|-1}$, also das Pro-

dukt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, wenn n positiv ganz ist, während $1! = 1$ und auch $0! = 1$ ist; und wir nennen dieses Zeichen $(n!)$ die Fakultät von n.

(S. das Syst. d. Math. Theil II. 2te Auflage).

§. 2.

Unter $Sin\,x$ und $Cos\,x$ verstehen wir allemal bezüglich die unendlichen Reihen

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]^{*)} \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

d. h. die Reihen

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

für jeden reellen oder imaginären Werth von x genommen. — Sie sind immer nur eindeutig.

Unter den Zeichen $Tg\,x$ und $Cotg\,x$ verstehen wir dagegen bezüglich die Quotienten $\frac{Sin\,x}{Cos\,x}$ und $\frac{Cos\,x}{Sin\,x}$, während x eben so gut reell als auch imaginär seyn kann. Auch diese Funktionen sind nur eindeutig.

Durch π haben wir ein für allemal unter den positiven Werthen von x, für welchen die unter $Sin\,x$ verstandene unendliche Reihe den Werth 0 annimmt, den kleinsten derselben bezeichnet; und es wird gefunden

$$\pi = 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279$$
$$50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944$$
$$59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825$$
$$34211\ 70679\ 82148\ 08651\ 32723\ 06647$$
$$09384\ 46 \text{ in inf.}^{**)}$$

---

*) Unter solchen und ähnlichen Zeichen verstehen wir allemal die Summe aller der Glieder, welche aus dem, hinter dem Summenzeichen S stehenden allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man statt der kleinen deutschen Buchstaben nach und nach 0,1,2,3 und alle (positiven) ganzen Zahlen setzt. (S. die Vorrede).

**) In den Anwendungen der Analysis auf Geometrie zeigt

und man hat diese Zahl π bereits auf noch mehr als diese vorstehenden 127 Decimalstellen berechnet.

§. 3.

1) Unter der natürlichen Potenz e^x verstehen wir allemal die (eindeutige) unendliche Reihe

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right] \text{ d. h. } 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+ \text{ in inf.}$$

Unter e selbst (welche Zahl auch die Basis der natürlichen Logarithmen genannt wird) verstehen wir also dieselbe Reihe, aber für $x = 1$ genommen, so daß man hat

$$e = S\left[\frac{1}{a!}\right] \text{ d. h. } = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+ \text{ in inf.}$$

d. h. näherungsweise

$$e = 2,\ 718281 \quad 828459 \quad 045235 \quad 36028 \text{ in inf.}$$

2) Unter i verstehen wir immer die Form $\sqrt{-1}$, und wir drücken die beiden Formen dieser Quadratwurzel $(\sqrt{-1})$ durch $+i$ und $-i$ aus, indem wir i selbst als einförmig (eindeutig) ansehen. — Es ist dabei allemal, so lange nur n eine ganze Zahl vorstellt,

$$i^{4n} = +1; \quad i^{4n+1} = +i; \quad i^{4n+2} = -1 \text{ und } i^{4n+3} = -i.$$

---

sich dieselbe Zahl als die Länge des Halbkreises, dessen Radius $= 1$ ist. — In denselben Anwendungen zeigen sich auch die Werthe der unendlichen Reihen *Sin* x, *Cos* x und der Quotienten *Tg* x, *Cotg* x, so oft statt x die Länge eines Kreisbogens gesetzt wird, dessen Radius $= 1$ ist, als die Ausdrücke der Längen gewisser Geraden in demselben Kreise, welche in der Elementar-Trigonometrie bezüglich die Namen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten führen.

Uebrigens ist noch

$$\log brigg. \pi = 0,\ 49714 \quad 98726 \quad 94133 \quad 85435 \quad 126 \text{ in inf.}$$

und

$$L\pi = 1,\ 14472 \quad 98858 \quad 49400 \quad 17414 \quad 342 \text{ in inf.},$$

wenn unter *L* der Hyperbolische oder Neper'sche Logarithme verstanden wird, d. h. der einzige reelle Werth des natürlichen Logarithmen.

3) Vergleicht man dies mit §. 2. so hat man

I. $e^{\pm x \cdot i} = Cos\, x \pm i \cdot Sin\, x$
$= Cos\,(2\nu\pi + x) \pm i \cdot Sin\,(2\nu\pi + x) = e^{\pm(2\nu\pi + x) \cdot i}$

und daher auch

II. $e^{2\nu\pi \cdot i} = Cos\, 2\nu\pi + i \cdot Sin\, 2\nu\pi = 1,$

wenn nur unter ν entweder Null oder jede positive oder negative ganze Zahl verstanden wird.

§. 4.

1) Den imaginären Ausdruck $p + q \cdot i$ kann man allemal auf die Form $r \cdot (Cos\, \psi + i \cdot Sin\, \psi)$ oder $r \cdot e^{\psi \cdot i}$ eines Produktes bringen, wenn man $r = +\sqrt{p^2 + q^2}$ also immer positiv nimmt, dagegen ψ bestimmt aus den beiden Gleichungen

$$Cos\, \psi = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad Sin\, \psi = \frac{q}{r}, \text{*)}$$

so daß $Cos\, \psi$ mit p, und $Sin\, \psi$ mit q einerlei Vorzeichen hat. — Ist dann φ derjenige (einzige) der Werthe von ψ, welcher $> -\pi$ aber entweder $= +\pi$ ist oder zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so hat man noch überdieß allemal

$$\psi = 2\nu\pi + \varphi,$$

wo ν sowohl Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt. — Es ist also dann

I. $p + q \cdot i = r \cdot [Cos\,(2\nu\pi + \varphi) + i \cdot Sin\,(2\nu\pi + \varphi)] = r \cdot e^{(2\nu\pi + \varphi) \cdot i}$.

Dabei wird die positive Zahl r der Modul, dagegen ψ oder $2\nu\pi + \varphi$ das Argument oder der Bogen des imaginären Ausdrucks $p + q \cdot i$ genannt; dieser Bogen hat also immer unendlich viele Werthe.

---

*) Aus diesen beiden Gleichungen folgt auch noch $Tg\, \psi = \frac{q}{p}$. Der Werth von ψ ist aber durch eine einzige dieser 3 Gleichungen, also auch durch diese dritte allein nicht vollkommen gegeben, sondern ψ muß jedesmal zweien derselben genügen.

2) Daher wird auch sogleich gefunden (aus I.)

$$\text{II.}\quad \sqrt[m]{(p+q\cdot i)} = \sqrt[m]{r}\times\left[Cos\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}+i\cdot Sin\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}\right],$$

wo der erstere Faktor $\sqrt[m]{r}$ als eindeutig und positiv angesehen wird, während der zweite Faktor m verschiedene Werthe liefert (nicht mehr und nicht weniger), die alle hervorgehen, wenn man statt ν nach und nach 0,1,2,3,··· und zuletzt $m-1$, oder auch $0,\pm1,\pm2,\pm3$, u. s. f. setzt, bis man m Werthe hat. — Dies gilt auch, wenn $q=0$, der Ausdruck $p+q\cdot i$ also reell ist.

3) Die gebrochene Potenz $(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}$, mag $q=o$ oder nicht Null, mag also der Ausdruck $p+q\cdot i$ reell oder imaginär seyn, — hat ebenfalls n verschiedene Werthe (nicht mehr und nicht weniger), so lange $\frac{m}{n}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, — und diese sind ausgesprochen in der Gleichung

$$\text{III.}\quad (p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(r^m)}\times\left[Cos\frac{m}{n}(2\nu\pi+\varphi)+i\cdot Sin\frac{m}{n}(2\nu\pi+\varphi)\right],$$

während $\sqrt[n]{(r^m)}$ eindeutig und positiv gedacht wird (wie unmittelbar aus Nr. 2. hervorgeht) *).

§. 5.

Unter dem Zeichen *log* a verstehen wir immer den unendlich-vieldeutigen natürlichen Logarithmen von a d. h. alle die unendlich vielen Werthe von x, welche $e^x=a$ machen. Es ist allemal (aus §. 4. I.)

$$\alpha)\quad log(p+q\cdot i) = Lr+(2\nu\pi+\varphi)\cdot i, \;**)$$

*) Man bemerke, daß die in Nr. 1. erwähnte Umformung der Summe $p+q\cdot i$ in das Produkt $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ eben den Vortheil hat, daß man die Potenzirung, die Wurzel-Ausziehung und auch die Logarithmirung der Summe $p+q\cdot i$, auf das Produkt $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ übertragen, dann aber ohne Weiteres und mit der größten Bequemlichkeit ausführen kann.

**) Versteht man unter $L^a\,z$ allemal den künstlichen Logarithmen von

wenn $r = +\sqrt{p^2+q^2}$ ist, wenn Lr den einzigen reellen Werth des natürlichen Logarithmen der positiven Zahl r (den sogenannten hyperbolischen oder Neper'schen Logarithmen) und φ den, zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegenden Bogen bedeutet, dessen Kosinus und Sinus bezüglich $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{r}$ sind, und der auch $= +\pi$ selbst seyn kann, während ν sowohl 0 als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt.

Ist daher a positiv, so findet sich (aus α.)

$$\beta)\qquad log(+a) = La+2\nu\pi\cdot i;$$

$$\gamma)\qquad log(-a) = La+(2\nu+1)\pi\cdot i.$$

Durch $L(p+q\cdot i)$ bezeichnen wir dagegen von allen diesen Werthen den einfachsten, d. h. den, in welchem $\nu = 0$ gedacht ist, so daß man hat

$$\delta)\qquad L(p+q\cdot i) = Lr+\varphi\cdot i,$$

während φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt oder $= +\pi$ ist; — deshalb ist auch, wenn $-a$ negativ ist,

$$\varepsilon)\qquad L(-a) = La+\pi\cdot i.$$

Ist $q = 0$ und p positiv, so wird $r = p$ und $Cos\,\varphi = 1$, $Sin\,\varphi = 0$, also $\varphi = 0$, und man hat $Lp = Lr$, d. h. der durch Lp bezeichnete einfachste Werth des natürlichen Logarithmen der positiven Zahl p, ist allemal zugleich der einzige reelle Werth desselben Logarithmen (also der tabellarische natürliche Logarithme, d. h. der Neper'sche).

---

z für die positiv gedachte Basis a, d. h. jeden Ausdruck x, der $a^x = z$ d. h. $e^{x\cdot La} = z$ macht, so hat man allemal $L^a z = \frac{Lz}{La} = \frac{1}{La}\cdot Lz$. — Und ist $a = 10$, so daß $L^a z$ der Brigg'sche Logarithme von z ist, so hat man

$$La = L\,10 = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914 \text{ in inf. und}$$

$$\frac{1}{La} = \frac{1}{L\,10} = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289 \text{ in inf.}$$

§. 6.

Unter der allgemeinen Potenz a^x verstehen wir allemal alle unendlich vielen Werthe der natürlichen Potenz $e^{x \cdot log\, a}$, indem statt $log\, a$ nach und nach jeder der unendlich vielen Werthe des Logarithmen von a gesetzt wird *).

Der durch $e^{x \cdot L a}$ ausgedrückte einzige Werth dieser Potenz a^x wird der einfachste Werth dieser Potenz genannt, mag a reell oder imaginär seyn.

Ist a positiv, so wird der einfachste Werth der allgemeinen Potenz zu gleicher Zeit diejenige Potenz, welcher der künstliche Logarithme gegenüber steht, und welche daher am füglichsten die künstliche Potenz genannt wird.

Für den einfachsten Werth der allgemeinen Potenz, also namentlich auch für die künstliche Potenz hat man

$$a^x = 1 + \frac{x \cdot La}{1} + \frac{x^2 \cdot (La)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (La)^3}{3!} + \cdots,$$

und diese Potenz ist immer nur eindeutig, mag a reell oder imaginär gedacht werden.

§. 7.

Alle Werthe der allgemeinen Potenz $(p+q \cdot i)^{\alpha+\beta \cdot i}$ sind ausgedrückt in der Formel

$$(\odot) \cdots \quad (p+q \cdot i)^{\alpha+\beta \cdot i} = e^{\alpha \cdot L r - \beta \cdot (2\nu\pi+\varphi)}$$
$$\times \Big(Cos[\beta \cdot L r + \alpha \cdot (2\nu\pi+\varphi)] + i \cdot Sin[\beta \cdot L r + \alpha \cdot (2\nu\pi+\varphi)] \Big),$$

wenn r, φ die Bedeutung der Nr. 1. des §. 4. haben und auch ν wiederum Null und jede positive, auch jede negative ganze Zahl vorstellt.

In dieser allgemeinen Formel ($\odot$) stecken sogleich wieder als besondere Formeln die II. u. III. des §. 4, so wie auch die Formel

*) Die natürliche Potenz e^z wird immer nur eindeutig gedacht (nach §. 3.); die unendlich vielen Werthe entstehen also hier nur dadurch, daß der Exponent z d. h. $x \cdot log\, a$ mit dem $log\, a$, zugleich unendlich viele Werthe hat.

$$(p+q\cdot i)^m = r^m\cdot[\mathit{Cos}\, m\varphi + i\cdot \mathit{Sin}\, m\varphi],$$

wenn m positiv oder negativ ganz oder 0 ist.

§. 8.

Für diese allgemeinen Potenzen gelten die beiden Formeln

$$1)\ a^x b^x = (ab)^x; \qquad 2)\ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

unbedingt, dergestalt, daß in jeder dieser Gleichungen der Ausdruck links genau so viele Werthe hat, als der Ausdruck rechts, so daß jeder der gedachten beiden Ausdrücke den andern ganz und vollkommen ersetzt; dagegen bedürfen die Gleichungen

$$a^x\cdot a^z = a^{x+z}, \qquad \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z} \quad \text{und} \quad (a^x)^z = a^{xz}$$

noch einer Korrektion, wenn sie eben so vollkommene Gleichungen seyn sollen als die obigen, und zwar haben in diesen letztern, die Ausdrücke zur Linken der Gleichheitszeichen im Allgemeinen viel mehr Werthe als bezüglich die zur Rechten. Diese Gleichungen müssen dahin verbessert werden, daß man schreibt:

$$3)\qquad a^x\cdot a^z = a^{x+z}\cdot e^{2(\mu x+\nu z)\pi\cdot i}$$

$$4)\qquad \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}\cdot e^{2(\mu x+\nu z)\pi\cdot i}$$

$$5)\qquad (a^x)^z = a^{xz}\cdot e^{2\nu z\pi\cdot i}$$ *),

wo μ und ν unabhängig von einander Null und jede positive auch jede negative ganze Zahl vorstellen. In diesen letztern drei Gleichungen haben nun die Ausdrücke links und rechts wiederum genau gleich viele und genau dieselben Werthe **).

---

*) S. den „Geist der mathem. Analysis. Berlin 1842." pag. 129 seqq.

**) Die Gleichungen zwischen den natürlichen Logarithmen

$$1)\qquad \mathit{log}\,(ab) = \mathit{log}\, a + \mathit{log}\, b$$

$$2)\qquad \mathit{log}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathit{log}\, a - \mathit{log}\, b$$

haben links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe; sie sind also vollkommene Gleichungen.

Nur diese letzteren Gleichungen können in allgemeinen Rechnungen statt der gewöhnlichen, aber unvollkommenen Gleichungen in Anwendung kommen.

§. 9.

Ein Ausdruck heißt ausgerechnet, wenn er auf die Form $p+q\cdot i$ gebracht ist, während p und q beliebig reell sind, so daß auch $q=0$ seyn kann, eben so wie p.

In dem Vorhergehenden finden wir bereits ausgerechnet a) die Potenz $(p+q\cdot i)^m$, wenn m eine ganze Zahl (§. 7.); b) die Potenz $(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}$, wenn $\frac{m}{n}$ positiv oder negativ gebrochen ist (§. 4. III.); c) die Wurzel $\sqrt[m]{p+q\cdot i}$ (§. 4. II.); d) die allgemeine Potenz, so wie deren einfachsten Werth (§. 7. ⊙), letzteren für $\nu=0$; e) den natürlichen Logarithmen $log(p+q\cdot i)$ (§. 5. α.), so wie dessen einfachsten Werth (§. 5. δ.).

Bemerken wir daher hier noch die „ausgerechneten" Werthe von $Sin(p+q\cdot i)$, $Cos(p+q\cdot i)$, $Tg(p+q\cdot i)$ und $Cotg(p+q\cdot i)$, nämlich nachstehende Formeln:

1) $Sin(p+q\cdot i)=\frac{1}{2}(e^q+e^{-q})\cdot Sin\,p+\frac{1}{2}(e^q-e^{-q})\cdot Cos\,p\times i;$

2) $Cos(p+q\cdot i)=\frac{1}{2}(e^q+e^{-q})\cdot Cos\,p-\frac{1}{2}(e^q-e^{-q})\cdot Sin\,p\times i;$

3) $$Tg(p+q\cdot i)=\frac{2\cdot e^{2q}\cdot Sin\,2p}{1+2e^{2q}\cdot Cos\,2p+e^{4q}}+\frac{e^{4q}-1}{1+2e^{2q}\cdot Cos\,2p+e^{4q}}\times i;$$

Dasselbe ist aber nicht mit der Gleichung

$$log(a^b)=b\cdot log\,a$$

der Fall, welche, auch wenn a^b nur eindeutig ist, rechts doch immer (im Allgemeinen) weniger Werthe hat als links.

Aus $log(a^2)=2\cdot log\,a$ und $log(-a)^2=2\cdot log(-a)$ kann man daher nicht folgern, daß $log\,a=log(-a)$ ist, obgleich $(-a)^2=a^2$ gefunden wird; denn $2\cdot log\,a$ und $2\cdot log(-a)$ drücken nur Werthe von $log(a^2)$ aus, und jedes dieser beiden Produkte auch jedesmal andere Werthe.

4) $$Cotg(p+q \cdot i) = \frac{2 \cdot e^{2q} \cdot Sin\, 2p}{1-2 \cdot e^{2q} \cdot Cos\, 2p + e^{4q}} - \frac{e^{4q}-1}{1-2 \cdot e^{2q} \cdot Cos\, 2p + e^{4q}} \times i \text{*)}.$$

§. 10.

Unter

$$\frac{1}{Sin} \cdot x, \quad \frac{1}{Cos} \cdot x, \quad \frac{1}{Tg} \cdot x, \quad \frac{1}{Cotg} \cdot x$$

verstehen wir allemal die unendlich vielen, reellen oder imaginären Werthe (Bogen oder Argumente genannt), deren

Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente

bezüglich dem (reellen oder imaginären) Ausdrucke x gleich ist.

Dagegen verstehen wir, wenn x reell, und — so oft x den Werth eines Sinus oder Cosinus ausdrücken soll, auch noch an sich (d. h. abgesehen vom Vorzeichen) nicht größer als *1* ist, — unter

$$Arc\, sin.\, x, \quad Arc\, tg.\, x, \quad Arc\, cotg.\, x$$

den $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ und an sich kleinsten Werth (Bogen), dessen

Sinus, Tangente, Cotangente

den $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegebenen Werth x hat; — unter

$$Arc\, cos.\, x$$

---

*) Die Formel 3. hört auf brauchbar zu seyn, so oft der Nenner der Null gleich wird; dies ist aber für reelle Werthe von p und q nur dann der Fall, wenn $Cos\, 2p = -1$, also $p = (\nu + \frac{1}{2})\pi$ und $q = 0$ ist. In diesem Falle existirt die Tangente gar nicht, da der Ausdruck für sie die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, also im Kalkul nicht mehr zulässig ist.

Eben so hört die Formel 4. auf brauchbar zu seyn, wenn der in ihr vorkommende Nenner der Null gleich wird, d. h. wenn $p = \nu\pi$ und $q = 0$ ist, weil dann der Ausdruck die Form $\frac{1}{0}$ annimmt. Das Auszudrückende existirt aber nun auch nicht mehr.

verstehen wir dagegen den kleinsten positiven Werth (Bogen), dessen Cosinus diesen Werth x hat, so daß $Arc\,cos.\,x \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$ ist, je nachdem die Zahl x $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben sich findet.

§. 11.

Die unendlich vielen Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$, $\frac{1}{Cos}\cdot x$, $\frac{1}{Tg}\cdot x$ und $\frac{1}{Cotg}\cdot x$, wenn x beliebig reell oder imaginär ist, werden nun „ausgerechnet" (§. 9), nach folgenden Formeln, in denen unter ν stets Null nnd jede positive, so wie jede negative ganze Zahl verstanden wird. — Es ist nämlich:

I. 1. $\frac{1}{Sin}\cdot(p+q\cdot i) = \nu\pi+(-1)^\nu\left[\varphi+i\times L\left(\frac{p}{Sin\,\varphi}+\frac{q}{Cos\,\varphi}\right)\right]$,

wenn weder $p = 0$ noch $q = 0$ ist und wenn

$$\varphi = \pm Arc\,sin.\sqrt{\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+1)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4p^2}}$$

und φ mit p zugleich positiv oder zugleich negativ genommen wird.

Für $p = 0$ wird $Sin\,\varphi = 0$, und für $q = 0$ wird $Cos\,\varphi = 0$, also jedesmal einer der Nenner von I. 1. der Null gleich; dies führt zu den Ausnahmen

I. 2. $\frac{1}{Sin}\cdot(q\cdot i) = \nu\pi+(-1)^\nu\cdot L(q+\sqrt{q^2+1})\times i$,

I. 3. $\frac{1}{Sin}\cdot p = \nu\pi+(-1)^\nu\cdot Arc\,sin.\,p$,

so oft p (abgesehen vom Vorzeichen) nicht >1 ist; dagegen

I. 4. $\frac{1}{Sin}\cdot p = (2\nu\pm\frac{1}{2})\pi+i\times L(\pm p+\sqrt{p^2-1})$,

wenn p (abgesehen vom Vorzeichen) >1 ist, während alle oberen Vorzeichen gelten, so lange p positiv, alle unteren dagegen,

so wie p negativ gedacht wird *). Dabei hat $\sqrt{p^2-1}$ noch ihre beiden Werthe, so daß zu jedem Werthe von ν zwei Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot p$ sich ergeben. — Diese letzteren Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot p$ sind alle imaginär.

Für $\frac{1}{Cos}$ hat man folgende Formeln:

II. 1. $$\frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i) = 2\nu\pi \pm \left[\varphi + i \times L\left(\frac{p}{Cos\,\varphi} - \frac{q}{Sin\,\varphi}\right)\right],$$

wenn weder $p = 0$ noch $q = 0$ ist und φ gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = Arc\,cos.\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+1) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2+1)^2 - 4p^2}}\right),$$

in welcher das (+) Zeichen gilt, wenn p positiv, das (—) Zeichen dagegen, wenn p negativ gegeben ist.

Für $p = 0$ wird

II. 2. $$\frac{1}{Cos}\cdot(q\cdot i) = (\nu+\tfrac{1}{2})\pi + (-1)^\nu\cdot L\left(-q+\sqrt{q^2+1}\right) \times i,$$

wo $\sqrt{q^2+1}$ nur ihren positiven Werth vorstellt.

Für $q = 0$ und p, abgesehen vom Vorzeichen, $\overline{\overline{<}}1$ wird

II. 3. $$\frac{1}{Cos}\cdot p = 2\nu\pi \pm Arc\,cos.\,p,$$

welche Werthe alle reell sind.

Ist dagegen $q = 0$ und der absolute Werth von $p, > 1$, so hat man:

II. 4. $$\frac{1}{Cos}\cdot p = \begin{Bmatrix} 2\nu\pi + i \times L\left(p+\sqrt{p^2-1}\right) \\ (2\nu+1)\pi + i \times L\left(-p+\sqrt{p^2-1}\right) \end{Bmatrix},$$

je nachdem p $\begin{cases}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{cases}$

---

*) Während die letzteren Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot p$ alle imaginär sind, sind die Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot p$ in I. 3. (wo p an sich nicht >1 vorausgesetzt worden) alle reell.

gegeben ist, wo jedesmal $\sqrt{p^2-1}$ noch beide Werthe der Quadratwurzel vorstellt.

Die Ausrechnung für $\frac{1}{Tg}$ findet sich wie folgt:

III. 1. $$\frac{1}{Tg}\cdot(p+q\cdot i) = \nu\pi+\varphi+\tfrac{1}{4}L\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}\times i,$$

wenn nicht $p=0$ und wenn

$$\varphi = Arc\,tg.\frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

ist und dabei die Quadratwurzel im Zähler ihren positiven Werth vorstellt.

Für $p=0$ und $\pm q<1$ *) wird aber

III. 2. $$\frac{1}{Tg}\cdot(q\cdot i) = \nu\pi+\tfrac{1}{2}L\left(\frac{1+q}{1-q}\right)\times i.$$

Für $p=0$ und $\pm q>1$ hat man dagegen:

III. 3. $$\frac{1}{Tg}\cdot(q\cdot i) = (2\nu\pm\tfrac{1}{2})\pi+\tfrac{1}{2}L\left(\frac{q+1}{q-1}\right)\times i.$$

Für $p=0$ und $q=\pm1$ existirt keine Ausrechnung, so daß $\frac{1}{Tg}\cdot(\pm i)$ auf die Form $\alpha+\beta\cdot i$ nicht gebracht werden kann. Dieser letztere Ausdruck ist daher eine in der Rechnung unzulässige Form.

Für $q=0$ wird endlich (aus III. 1.)

III. 4. $$\frac{1}{Tg}\cdot p = \nu\pi+Arc\,tg.\,p.$$

Zuletzt kommt noch die Ausrechnung für $\frac{1}{Cotg}$, nämlich:

IV. 1. $$\frac{1}{Cotg}\cdot(p+q\cdot i) = \nu\pi+\varphi+\tfrac{1}{4}L\left(\frac{p^2+(1-q)^2}{p^2+(1+q)^2}\right)\times i,$$

---

*) Wir finden es bequem zu schreiben $\pm q<1$, wenn wir sagen wollen, daß q abgesehen vom Vorzeichen, <1 seyn soll, (so daß also das obere Vorzeichen gilt, wenn q positiv, das untere dagegen, wenn q negativ).

wenn nicht $p = 0$ und wenn

$$\varphi = Arc\,cotg.\,\frac{p^2+q^2-1+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{2p}$$

ist, dabei aber die Wurzel im Zähler positiv genommen wird.

Für $p = 0$ und $\pm q<1$ wird

IV. 2. $$\frac{1}{Cotg}\cdot(q\cdot i) = (\nu+\tfrac{1}{2})\pi+\tfrac{1}{2}L\left(\frac{1-q}{1+q}\right)\times i.$$

Für $p = 0$ und $\pm q>1$ hat man dagegen

IV. 3. $$\frac{1}{Cotg}\cdot(q\cdot i) = \nu\pi+\tfrac{1}{2}L\left(\frac{q-1}{q+1}\right)\times i.$$

Für $p = 0$ und $q = \pm 1$ giebt es keine solche Form $\alpha+\beta\cdot i$, welche dem $\frac{1}{Cotg}(\pm i)$ gleich wäre.

Für $q = 0$ endlich ergiebt sich noch (aus IV. 1.)

IV. 4. $$\frac{1}{Cotg}\cdot p = \nu\pi+Arc\,cotg.\,p,$$

wenn nur überall unter ν sowohl die Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl verstanden wird *).

Anmerkung. Diese Argumente oder Bogen

$$\frac{1}{Sin}\cdot x,\quad \frac{1}{Cos}\cdot x,\quad \frac{1}{Tg}\cdot x,\quad \frac{1}{Cotg}\cdot x$$

sind nichts anders als logarithmische Funktionen von x, nämlich

$$\frac{1}{Sin}\cdot x = \frac{1}{i}\cdot log\,(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i);$$

$$\frac{1}{Cos}\cdot x = \frac{1}{i}\cdot log\,(x+\sqrt{x^2-1});$$

---

*) Einige wenige dieser 16. Formeln finden sich auch bei andern Schriftstellern, dann aber nicht vollständig richtig. (Vgl. Geist der Differential- und Integral-Rechnung, Erlangen 1846. Einleitung pag. 30. seqq., wo auch die ganze Herleitung aller dieser Formeln zu finden ist).

$$\frac{1}{Tg}\cdot x = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i};$$

$$\frac{1}{Cotg}\cdot x = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{x+i}{x-i};$$

und die unendlich vielen Werthe der Logarithmen zur Rechten führen eben zu den unendlich vielen Werthen der Funktionen zur Linken.

§. 12.

Um mit diesen Funktionen (Argumenten) im Allgemeinen richtig zu rechnen, dazu hat man die nachstehenden Formeln:

I. $$\frac{1}{Sin}\cdot(\pm x)+\frac{1}{Sin}\cdot(\pm z) = \frac{1}{Sin}\cdot(x\cdot\sqrt{1-z^2}+z\cdot\sqrt{1-x^2});$$

II. $$\frac{1}{Sin}\cdot(\pm x)-\frac{1}{Sin}\cdot(\pm z) = \frac{1}{Sin}\cdot(x\cdot\sqrt{1-z^2}-z\cdot\sqrt{1-x^2});$$

III. $$\frac{1}{Cos}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot z = \frac{1}{Cos}\cdot(xz-\sqrt{(1-x^2)(1-z^2)});$$

IV. $$\frac{1}{Cos}\cdot x-\frac{1}{Cos}\cdot z = \frac{1}{Cos}\cdot(xz+\sqrt{(1-x^2)(1-z^2)});$$

V. $$\frac{1}{Tg}\cdot x+\frac{1}{Tg}\cdot z = \frac{1}{Tg}\cdot\frac{x+z}{1-xz}\ {}^{*)};$$

*) So richtig diese Gleichung V. ist, da sie, wie alle diese Gleichungen I.—IX. links genau so viele Werthe und genau dieselben hat als rechts, so wenig dürfte man diese andere Gleichung

$$Arc\,tg.x+Arc\,tg.z = Arc\,tg.\frac{x+z}{1-xz}$$

für allgemein wahr halten, obgleich sie dieselbe ist als die V., nur daß an die Stelle der allgemeinen Bogen (Argumente), jetzt die reellen und eindeutigen Bogen getreten und x und z reell gedacht sind. So wie nämlich z. B. die Werthe von x und z positiv aber so gedacht sind, daß $xz>1$ ist, so bedeutet (nach §. 10.) $Arc\,tg.\frac{x+z}{1-xz}$ einen negativen Bogen, während $Arc\,tg.x+Arc\,tg.z$ positiv und $>\frac{1}{2}\pi$ ist. — Die gedachte Gleichung $Arc\,tg.x+Arc\,tg.z = Arc\,tg.\frac{x+z}{1-xz}$ bleibt aber wahr (während

VI. $$\frac{1}{Tg}\cdot x - \frac{1}{Tg}\cdot z = \frac{1}{Tg}\cdot\frac{x-z}{1+xz};$$

u. s. w. f.

Ferner ist noch

VII. $$\frac{1}{Sin}\cdot(\pm x) = \frac{1}{Cos}\cdot\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{Tg}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

VIII. $$\frac{1}{Cos}\cdot(\pm x) = \frac{1}{Sin}\cdot\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{Tg}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

IX. $$\frac{1}{Tg}\cdot(\pm x) = \frac{1}{Sin}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{Cos}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

In diesen Gleichungen I.—IX. sind nur Ausdrücke angeführt, welche einander vollkommen gleich sind, d. h. von denen jeder, der für den andern gesetzt wird, nicht mehr und nicht weniger und auch genau dieselben Werthe hat als der andere für den er gesetzt wird. Die Quadratwurzeln sind dabei als zweiförmig anzusehen. (Vgl. d. Geist der mathem. Analysis. Berlin 1842, wo auch die allgemeine Herleitung dieser Rechnungsregeln zu finden ist). — Nur solche vollkommene Gleichungen sind in allgemeinen Rechnungen mit vollkommener Sicherheit zu gebrauchen.

§. 13.

Aus der Lehre der höhern Gleichungen ist bekannt:

1) Ist α irgend ein Werth von x, welcher die ganze Funktion $F_x, = 0$, aber nicht $\partial F_x, = 0$*) macht, so kommt

---

x und z positiv vorausgesetzt werden), so lange $xz<1$ ist; so wie aber $xz>1$ wird, hat man

$$Arc\,tg.\,x + Arc\,tg.\,z = \pi + Arc\,tg.\,\frac{x+z}{1-xz}.$$

*) Unter ∂F_x (mit dem runden ∂) verstehen wir immer die Ableitung, Derivation oder den Differential-Koefficienten von F_x nach x, d. h. diejenige Funktion von x, welche den Quotienten (das Verhältniß) der beiden zusammengehörigen unendlich kleinen Zuwachse dF und dx (die wir immer durch stehende d bezeichnen) ausdrückt, so daß man

$$\partial F_x = \frac{dF}{dx}$$

hat.

der Faktor $x-\alpha$ oder $1-\frac{x}{\alpha}$ unter den Faktoren von F_x nur ein einziges Mal vor.

2) Dies gilt, der Grad m der ganzen Funktion F_x mag noch so groß gedacht werden; also muß es auch noch gelten, wenn m unendlich groß gedacht wird, d. h. wenn F_x eine unendliche Reihe ist, die nach ganzen Potenzen von x fortläuft, sobald nur diese Reihe, wie dies bei jeder ganzen Funktion vom **endlichen** Grade vorausgesetzt ist, für jeden reellen oder imaginären Werth von x, wirklich einen Werth hat, d. h. stets convergent ist.

3) Da nun $Sin\, x$ und $Cos\, x$ als unendliche Reihen gedacht (wie wir dies in der Analysis immer voraussetzen), dieser letztern Bedingung genügen, und da, wenn unter F_x entweder $Sin\, x$ oder $Cos\, x$ gedacht wird, nie F_x und ∂F_x (d. h. $\pm Sin\, x$ und $Cos\, x$) zu gleicher Zeit 0 werden, so haben $Sin\, x$ und $Cos\, x$ unendlich viele und lauter ungleiche Faktoren, welche aus $x-\alpha$ oder $1-\frac{x}{\alpha}$ erhalten werden, wenn man statt α alle reellen und imaginären Werthe setzt, welche bezüglich $Sin\, x$ oder $Cos\, x$, der Null gleich machen.

4) Nun giebt es aber keine imaginären Werthe von x, welche $Sin\, x$ oder $Cos\, x$ zu Null machen; also haben $Sin\, x$ und $Cos\, x$ unendlich viele ungleiche und nur reelle Faktoren.

5) Da endlich $\nu\pi$ alle Werthe vorstellt, welche statt x gesetzt $Sin\, x = 0$ machen, und da $(\nu+\frac{1}{2})\pi$ alle Werthe vorstellt, welche statt x gesetzt, $Cos\, x = 0$ machen, sobald nur unter ν nach und nach 0 und auch jede positive, wie jede negative ganze Zahl verstanden wird; — so folgt daraus:

$$\text{I.}\begin{cases} Sin\, x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\ \text{in inf.} \qquad \text{oder} \\ Sin\, x = x\cdot P\left[\left(1-\frac{x}{(a+1)\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{(a+1)\pi}\right)\right] \\ \qquad = x\cdot P\left[1-\frac{x^2}{(a+1)^2\pi^2}\right], \end{cases}$$

wenn P das Produkt bedeutet aller der unendlich vielen Faktoren, welche aus dem allgemeinen Faktor hervorgehen, sobald statt des deutschen Buchstaben a jede positive ganze Zahl oder Null gesetzt wird.

Ferner folgt (aus obigem) noch:

$$\text{II.}\begin{cases} Cos\,x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots \\ \text{oder} \\ Cos\,x = P\left[\left(1-\frac{2x}{(2a+1)\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{(2a+1)\pi}\right)\right] \\ \qquad = P\left[1-\frac{4x^2}{(2a+1)^2\pi^2}\right], \end{cases}$$

wenn statt des deutschen Buchstaben a zuerst 0 und dann noch jede positive ganze Zahl gesetzt wird *).

6) Aus I. und II. ergiebt sich dann

$$\text{III.} \qquad log\,Sin\,x = log\,x + S\left[log\left(1-\frac{x^2}{(a+1)^2\pi^2}\right)\right]$$

$$\text{IV.} \qquad log\,Cos\,x = S\left[log\left(1-\frac{4x^2}{(2a+1)^2\pi^2}\right)\right],$$

wo S jedesmal die Summe aller der Glieder vorstellt, welche aus dem allgemeinen Gliede sich ergeben, wenn 0, 1, 2, 3 u. s. w., das heißt wenn 0 und jede positive ganze Zahl statt des deutschen Buchstaben a gesetzt wird **).

---

*) D. h. also, je mehr Faktoren man nimmt, desto mehr nähert sich der Werth der Produkte zur Rechten in I. und in II. dem Werthe von *Sin* x, *Cos* x, es mag x reell oder imaginär genommen werden.

**) Da man $log\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)$ sogleich in die Reihe

$$-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\alpha^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\alpha^6}-\cdots$$

verwandeln kann, so kann man mittelst der Gleichungen III. und IV. die Logarithmen von *Sin* x und *Cos* x auch allemal nach Potenzen von x entwickelt herstellen, nur daß bei *log Sin* x auch noch das Glied *log* x vorkommt.

7) Aus I. folgt ferner noch:

V. $$\frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{a\cdot(1-a)(1+a)(2-a)(2+a)(3-a)(3+a)\cdots}{b\cdot(1-b)(1+b)(2-b)(2+b)(3-b)(3+b)\cdots}$$
$$= \frac{(1-a)^{\nu|1}\cdot a^{\nu|1}}{(1-b)^{\nu|1}\cdot b^{\nu|1}} \quad \text{für } \nu = +\infty \text{ und ganz;}$$

und, wenn $b = a+\frac{1}{2}$ gesetzt wird,

VI. $$Tg\, a\pi = \frac{(1-a)^{\nu|1}\cdot a^{\nu|1}}{(\frac{1}{2}-a)^{\nu|1}(\frac{1}{2}+a)^{\nu|1}} \quad \text{für } \nu = +\infty \text{ und ganz;}$$

d. h. je größer ν (positiv ganz) genommen wird, desto mehr nähern sich die Werthe der Ausdrücke zur Rechten, den Werthen der Ausdrücke zur Linken des (=) Zeichens, und für ν unendlich groß kommen beide einander unendlich nahe.

8) Differenziirt man die Gleichung III. nach x, so giebt dies

VII. $$Cotg\, x = S\left[\frac{2x}{x^2-\mathfrak{a}^2\pi^2}\right],$$

wenn der deutsche Buchstabe $\mathfrak{a}$ die Bedeutung wie in III. hat; jedoch muß man, wenn $\mathfrak{a}=0$ ist, bloß $\frac{1}{x}$ statt $\frac{2x}{x^2-\mathfrak{a}^2\pi^2}$ schreiben, d. h. von diesem Gliede nur die Hälfte nehmen *).

*) Dieselbe Reihe für $Cotg\, x$ kann man auch dadurch ohne Weiteres erhalten, daß man den Quotienten

$$\frac{Cos\, x}{Sin\, x} \quad \text{d. h.} \quad \frac{Cos\, x}{x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots}$$

in seine unendlich vielen Partial-Brüche zerlegt, so daß der zu dem Nenner $1+\frac{x}{\nu\pi}$ oder $x+\nu\pi$ gehörige Zähler, dem Werthe von $\frac{Cos\, x}{(Sin\, x):(x+\nu\pi)}$ gleich wird, wenn $x+\nu\pi=0$ ist, d. h. wenn man $-\nu\pi$ statt x setzt. Bestimmt man dann den $\frac{0}{0}$ Werth des Divisors $\frac{Sin\, x}{x+\nu\pi}$ für $x = -\nu\pi$, indem man Zähler und Nenner nach x differentiirt (welches $\frac{Cos\, x}{1}$ oder $Cos\, x$ giebt) und dann $-\nu\pi$ statt x schreibt, — so ergiebt sich dieser Zähler $=\frac{Cos\, \nu\pi}{Cos\, \nu\pi} = 1$, so daß der Partialbruch selbst $=\frac{1}{x+\nu\pi}$ wird, wo ν sowohl Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt.

Die Gleichung IV. dagegen, wenn sie ebenfalls differenziirt wird, giebt:

VIII. $$Tg\,x = -S\left[\frac{8x}{4x^2-(2a+1)^2\pi^2}\right]$$

wenn nur der deutsche Buchstabe a in demselben Sinne, wie immer, genommen wird.

§. 14.

Was die allgemeinen Ansichten des Kalkuls betrifft, so haben wir Folgendes festzuhalten:

1) Aus der Betrachtung der ganzen (unbenannten) Zahlen abstrahiren sich die Begriffe des Addirens, Multiplicirens und Potenzirens, so wie die damit in nothwendigem Zusammenhange stehenden Begriffe des Subtrahirens, Dividirens, Radicirens und Logarithmirens. Sie sind Verstandes-Thätigkeiten, Verstandes-Operationen und werden daher schlechtweg Operationen genannt, und sie werden ausgedrückt (bezeichnet) durch die Formen $a+b$, $a-b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{log}\,a$; diese Formen bilden also das Wesen dieser Begriffe, während die Buchstaben a, b nur die Träger dieser Formen und an sich im Allgemeinen inhaltslos und eben deshalb im Besonderen von beliebigem Inhalte seyn können.

2) Die eben erwähnten Verstandes-Thätigkeiten (Operationen) stehen nämlich mit einander in bestimmten Gegensätzen und Beziehungen und diese werden ausgesprochen in (identischen) Gleichungen, wie z. B. $(a-b).c = ac-bc$, $\frac{a}{b}.c = \frac{ac}{b}$, u. d. gl., welche Gleichungen ihrer Anzahl nach völlig bestimmt sind, so lange es sich nur um die einfachste Grundlage des Calculs handelt. Jede solche Gleichuug drückt das Verhalten der gedachten Verstandes-Thätigkeiten gegen einander aus, und es wird bewiesen, daß jeder von zwei solchen gleichen Ausdrücken, unbedingt für den andern gesetzt werden kann (obgleich in beiden

die Träger a, b, ganz inhaltlos gedacht werden), ohne daß man je befürchten müßte, dadurch mit den Gesetzen dieser Operationen in Widerspruch zu gerathen. — Jeder Ausdruck stellt nämlich eine Eigenschaft, oder mehrere Eigenschaften vor, die in Verbindung mit einander sein Wesen ausmachen; der andere, ihm gleiche stellt nun dasselbe Wesen vor und deshalb können beide für einander unbedingt gesetzt werden.

3) Es kann aber ein Ausdruck eine so allgemeine Eigenschaft vorstellen, daß es zwei oder mehr, oder sogar unendlich viele Formen giebt, welche diese Eigenschaft mit einander gemein haben; (so z. B. haben die Summe $0+a$ und die Differenz $0-a$, also zwei wesentlich verschiedene, einander nicht gleiche Formen, die Eigenschaft mit einander gemein, daß, wenn jede mit sich selbst multiplicirt, d. h. mit 2 potenzirt wird, dann ein und dasselbe Resultat aa kommt, eine Eigenschaft, die wir durch das Zeichen, d. h. durch den Ausdruck $\sqrt{(aa)}$ ausdrücken); dann ist der Ausdruck mehrförmig (mehrdeutig) und wenn dann zwei solche Ausdrücke einander (vollkommen) gleich seyn sollen, so muß der eine genau dieselben Formen ausdrücken wie der andere, — sie müssen beide gleichviel-deutig seyn; hat der eine dieser beiden gleichen Ausdrücke weniger Werthe (d. h. stellt er weniger einander nicht gleiche Formen vor) als der andere, so ist die Gleichung eine unvollkommene (unvollständige) und dann nur mit großer Vorsicht zu gebrauchen.

Zu allgemeinen Rechnungen darf man nur vollkommene Gleichungen verwenden.

3) Unter „Rechnen" verstehen wir nämlich nichts weiter als die Umformung eines gegebenen Ausdrucks mittelst Anwendung der Grund-Gleichungen (d. h. derer, welche das Verhalten der Operationen zu einander aussprechen) in andere Formen, die gewissen Zwecken entsprechen (in den Anwendungen namentlich in solche Formen, welche wir im §. 9. die ausgerechneten nannten, d. h. die zu Ende gerechneten, in so fern sie die einfachsten Formen sind, auf welche sich alle übrigen zurückführen lassen.

In diesem Begriffe ist alles und jedes Rechnen enthalten, auch das der sogenannten „gemeinen Rechenkunst“.

4) Die bestimmten (unbenannten, ganzen) Zahlen drücken wir durch Ziffern und die größeren durch systematisch geordnete Summen aus, deren Summanden Produkte aus Ziffern und Potenzen von zehn (oder irgend einer anderen Grundzahl) sind. So wie nun a und b Bedeutungen gewinnen und zunächst solche (ganze) Zahlen vorstellen, so erscheint die Differenz a—b in drei verschiedenen Formen, nämlich in der Form (b+c)—b, oder in der Form b—b oder a—a, oder endlich in der Form a—(a+c), wo c eine (ganze, wirkliche) Zahl vorstellt. Kann nun auch für die erstere Form die (ganze) Zahl c gesetzt werden, so bleiben doch die beiden andern Formen b—b und a—(a+c) selbständig, während wir mit denselben natürlich noch eben so vollkommen sicher rechnen (nach Nr. 3.) als zu der Zeit, wo in der Differenz (Form) a—b, die Buchstaben a und b noch ganz inhaltlos gewesen sind. Wir nennen die Form a—a (oder b—b) Null *) und führen dafür ein eigenes Zeichen (0) ein, während wir mittelst der allgemeinen Gesetze des Rechnens die dritte Form a—(a+c) in 0—c umformen und der Kürze wegen dafür bloß —c schreiben. Diese Form —c nennen wir einen subtraktiven Ausdruck (Zahl) so lange c ganz inhaltlos gedacht wird, dagegen eine negative (ganze) Zahl, sobald man sich unter c eine (wirkliche, ganze) Zahl denkt. — Eben so steht +c statt der Summe 0+c, und dabei wird wiederum ganz analog der additive Ausdruck (Zahl) von der positiven Zahl unterschieden.

Die positive (ganze) Zahl, die negative (ganze) Zahl und die Null sind in dem Begriff der „Differenz a—b zweier ganzen Zahlen“ zugleich enthalten.

5) Gewinnen nun die Buchstaben a und b solche allgemeinere Bedeutungen (d. h. stellen sie beliebige Differenzen ganzer Zahlen vor), so erscheint der Quotient $\frac{a}{b}$ entweder auch als

*) Dies ist die einzig wahre Definition der Null.

Differenz ganzer Zahlen oder er bleibt selbständig; im letztern Fall heißt er eine gebrochene Zahl*), die bald die Form $+\frac{\mu}{\nu}$, bald die Form $-\frac{\mu}{\nu}$ annehmen kann und dann positiv oder negativ gebrochen heißt. Man hat nun im Ganzen 5 specielle Zahl-Formen, welche die reellen Zahlen genannt werden, nichts anders als angezeigte Zahlen-Verbindungen, d. h. angezeigte Verstandes-Thätigkeiten sind, mit denen man aber nach völlig bestimmten und in den Grund-Gleichungen ausgesprochenen Gesetzen „rechnen" kann; nur darf in den Rechnungen kein Quotient vorkommen, dessen Divisor Null ist, weil im entgegengesetzten Falle die erhaltenen Gleichungen nicht nothwendig richtige Gleichungen seyn müssen. — Allgemeine Rechnungen gelten also für die besonderen Fälle nicht nothwendig, in denen einer der vorkommenden Divisoren die Form $a-a$, oder $b-b$, oder $q-q$ d. h. die durch 0 bezeichnete Form (Null) angenommen hat.

6) Haben nun die Buchstaben a, b rc. diese allgemeineren Bedeutungen der reellen Zahlen, so wird die Wurzel $\sqrt[m]{a}$ (wo m positiv ganz gedacht ist) und auch die Potenz a^b mehrförmig, d. h. mehrdeutig, und es wird bewiesen, daß diese mehreren Werthe entweder wiederum reell sind oder doch auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ gebracht werden können, wo p und q reell sind, die $\sqrt{-1}$ dagegen die einzige selbständig bleibende Wurzel ist, mit welcher natürlich nach denselben Gesetzen „gerechnet" werden kann, welche überhaupt für die allgemeine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ festgestellt werden konnten.

Wenn aber später der Begriff der Potenz noch erweitert

---

*) Dies ist die einzig haltbare Definition des Bruches oder der gebrochenen (unbenannten) Zahl. — Aus ihr geht in den Anwendungen der Analysis zur Vergleichung der Größen die gebrochene benannte Zahl hervor, welche dann als ein Theil des Ganzen erscheint, im Falle die ganze Einheit theilbar seyn sollte.

wird, — wenn man zu der natürlichen, der künstlichen, der allgemeinen Potenz schreitet, — wenn man die diesen Potenzen gegenüber liegenden Logarithmen betrachtet, — so läßt sich doch allemal erweisen, daß jeder Ausdruck, welcher wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen sein Entstehen verdankt, entweder einer reellen Zahl gleich ist, oder doch auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ gebracht werden kann, in welchem letzteren Fall wir den Ausdruck einen imaginären nennen*) (wenn q nicht Null ist).

*) Es braucht nicht ausdrücklich angeführt zu werden, daß imaginäre Zahlen eben so gut wirkliche Ausdrücke sind, wie die reellen, daß beide Gattungen von Formen völlig gleiche Stellung im systematischen Gebäude der Analysis haben, und daß nur die veraltete Ansicht, als „rechne" man mit „Größen" zu der älteren Verwirrung der Begriffe führen konnte. — Wendet man aber die Analysis zur „Vergleichung der Größen" an, so werden alle Größen als benannte ganze Zahlen, und wenn man den Begriff der benannten Zahl erweitert, auch als benannte gebrochene Zahlen ausgedrückt, die sich paarweise auf einerlei Einheit (Benennung) beziehen, und deren unbenannten Zahlen nie imaginär, aber auch nie negativ seyn können und mit positiven Zahlen nur in so fern vertauscht werden dürfen, als $+a$ soviel als $0+a$ bedeutet, und nach den Gesetzen des allgemeinen Rechnens $0+a = (b-b)+a = (b+a)-b = a$, also $+a = a$ ist. — In diesen Anwendungen ist also im Allgemeinen jede Ansatzgleichung nichts weiter als die Behauptung, daß beide Seiten der Gleichung Ausdrücke sind, welche eine und dieselbe ganze oder gebrochene (positive) Zahl bedeuten, obgleich man das Ansatzgeschäft auf mehr künstliche Weise zuweilen auch so lenken kann, daß beide Ausdrücke links und rechts der Ansatzgleichung eine und dieselbe negative (ganze oder gebrochene), ja selbst eine und dieselbe imaginäre Zahl ausdrücken.

Während aber dies mit den Ansatz-Gleichungen der Fall ist, ist es ganz anders mit den aus denselben gefolgerten Gleichungen; letztere entstehen durch die „Rechnung" d. h. durch die Anwendung derjenigen in Gleichungen ausgedrückten Gesetze, welche das allgemeine Verhalten der Operationen zu einander aussprechen; bei dem „Rechnen" und so lange man „rechnet" hat man es also nur mit den Formen zu thun, welche allein das Vorhandenseyn dieser oder einer anderen Operation (einer angezeigten, also wirklich vorhandenen Verstandes-Thätigkeit) ausdrücken; und dabei kann man stets versichert seyn, daß in jeder der erhaltenen Gleichungen, — sobald man

7) Wenn man übrigens mit allgemeinen Ausdrücken und namentlich mit **allgemeinen** unendlichen Reihen, welche die Form $a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$ der ganzen Funktionen von x haben, oder doch auf diese Form gebracht werden können, ganz sicher „rechnet", eben weil das Rechnen es nur mit den **Formen** zu thun hat, während letztere gerade da am reinsten sind, wo am allgemeinsten, — so muß man doch, wo die Ausdrücke, also z. B. auch die unendlichen Reihen, in Ziffern-Ausdrücke übergehen (also die unendlichen Reihen in **numerische**) stets **die** Fälle im Gedächtniß behalten, wo, einer vorangegangenen gründlichen Theorie zufolge, das „Rechnen" aufhört. Dies ist aber der Fall

a) wenn irgendwo 0 (Null) im Divisor erscheint;

b) wenn *log* 0 vorkommt oder 0^x, während x entweder noch allgemein, oder entschieden imaginär, oder 0 (Null) oder negativ ist; endlich

c) wenn die numerischen unendlichen Reihen **divergent** sind.

Wo also eine dieser Erscheinungen (in einem besonderen Falle der Anwendung) eintritt, da darf die allgemeine Rechnung nicht mehr beibehalten werden, sondern man muß für diesen besonderen Fall eine besondere Rechnung anlegen.

Aus $ax = b$ folgt z. B. im Allgemeinen $x = \frac{b}{a}$; allein dieses Resultat gilt nur, so lange a nicht Null ist. So wie $a = 0$ wird, muß man von vorn anfangen und die Gleichung $ax = b$ für diesen Fall direkt behan-

---

voraussetzt, daß den Buchstaben Bedeutungen untergelegt werden, welche ursprünglich aus wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen zusammengesetzt sind, — die beiden Seiten derselben stets **eine und dieselbe** ganze oder gebrochene, positive oder negative, reelle oder imaginäre Zahl vorstellen.

Hat man also zuletzt erhalten die Gleichungen

$$x = 3, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = -5, \quad u = -\frac{3}{5}, \quad v = 3-2\sqrt{-1},$$

so ist man überzeugt, daß die unbekannten und gesuchten und vorläufig durch x, y, z, u und v bezeichneten Zahlen und speciellen Zahlformen bezüglich genau die durch 3, $\frac{3}{2}$, -5, $-\frac{3}{5}$ und $3-2\cdot\sqrt{-1}$ vorgestellten sind.

deln, und da findet man dann sogleich, daß sie in $0 \cdot x = b$, d. h. in $0 = b$ übergeht und daher entweder einen Widerspruch anzeigt (wenn b nicht Null ist) oder zwar richtig ist, aber zur Bestimmung von x nicht mehr brauchbar, da sie dann für jeden beliebigen Werth von x richtig bleibt. — Ganz anders ist es, wenn a nicht Null, sondern unendlich klein ist, also wenn a nicht von der Form $b-b$, sondern von der Form $\frac{1}{p}$ ist, während dabei p ohne Ende wächst. Denn dann folgt aus $ax = b$ d. h. aus $\frac{1}{p}x = b$, sogleich $x = bp$, so daß, wenn b reell ist, x entweder positiv oder negativ ist, aber mit p selbst (abgesehen vom Vorzeichen) bis ins Unendliche wächst.

8) Am allerwichtigsten ist aber folgender Punkt: Wenn im Allgemeinen, wo x als ein bloßer Träger der Operations-Zeichen, ganz inhaltlos gedacht ist, ein Ausdruck z. B. 0^x als ein solcher hervortritt, mit dem keine weitere allgemeine Rechnung mehr möglich ist*), so kann doch unter einer besonderen Voraussetzung z. B. wenn x positiv (ganz oder gebrochen) gedacht wird (nach vorhergegangenen besonderen Begriffen) $0^x = 0$ seyn, so daß man nun statt 0^x mit gutem Gewissen unter der gemachten Voraussetzung 0 selbst setzen kann. Allein von hier ab muß man nun auch nie vergessen, daß x nicht mehr allgemein, sondern positiv vorausgesetzt worden ist.

Wir wollen noch ein anderes Beispiel geben: Sind a und b reelle Zahlen, also bloße Formen, welche aus ursprünglich ganzen Zahlen mittelst der vier (sogenannten elementaren) Operationen zusammengesetzt sind, so nennen wir a größer als b, und b kleiner als a, wenn wir sagen wollen, daß $a-b$ einer

---

*) Nach den Definitionen ist nämlich $0^x = e^{x \cdot log 0}$ und $log\, 0$ jeder der Werthe z, welche $e^z = 0$ d. h. $1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots = 0$ machen. Nun existirt aber keine reelle Zahl für z, welche $e^z = 0$ machte, aber auch keine imaginäre Zahl von der Form $p+q \cdot i$ für z, weil sonst ein Bogen existiren würde, dessen Sinus und Cosinus zu gleicher Zeit der Null gleich wären. — Und $e^{-\infty}$ ist nicht $= 0$ d. h. nicht $= b-b$, sondern $= \frac{1}{\infty}$.

positiven, oder $b-a$ einer negativen Zahl gleich ist. — Nach diesen Begriffen ist z. B.

$$1 > \frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000} > 0 > -\frac{1}{1000} > -\frac{1}{100} > -\frac{1}{10} > -1.$$

In den Anwendungen der Analysis auf die Größenlehre (d. h. zur Vergleichung der Größen) ist a℔ mehr als b℔ und zwar um $(a-b)$℔, so oft $a>b$, d. h. so oft $a-b$ positiv wird, und dabei drückt noch ebendaselbst $\frac{1}{p}$℔ den p^{ten} Theil eines Pfundes aus, so daß $\frac{1}{p}$℔ desto weniger ist, je kleiner $\frac{1}{p}$ d. h. je größer p ist; in diesen Anwendungen kann man also wohl auch einmal 0 statt $\frac{1}{p}$ setzen, wenn man weiß, daß p unendlich groß ist (also z. B. auch 0 statt e^{-a}, wenn a positiv und unendlich groß ist), während im Allgemeinen die subtraktive Form $b-b$ (d. h. Null) der divisiven Form $\frac{1}{p}$ **nie und zu keiner Zeit** gleich ist, also auch nie die eine statt der anderen gesetzt werden darf, wenn man nicht augenblicklich auf die **allgemeine** Gültigkeit der Resultate verzichten will.

Also: Ueberall wo man sich erlaubt einen Ausdruck für einen anderen zu setzen, der nicht nach den allgemeinen Gesetzen der Rechnung (welche in Form von Gleichungen aufgestellt werden und nichts anders als die Beziehungen und Gegensätze der 7 Operationen zu einander ausdrücken) dem andern gleich ist, sondern der nur in Bezug auf gewisse Anwendungen oder überhaupt nur unter gewissen besonderen Voraussetzungen statt jenes anderen gesetzt werden darf — leistet man auf die allgemeine Form und zugleich auf die mit ihr verknüpfte Wohlthat einer unbedingten Allgemeingültigkeit der Rechnung Verzicht, und im weiteren Verlaufe der Untersuchung muß man von hier ab die erhaltenen Ausdrücke nur als Ziffern-Werthe ansehen und behandeln, die entweder reell oder imaginär

sind; daher darf man von da ab auch die unendlichen Reihen nur als numerische und convergente behandeln, selbst wenn sie die Form der ganzen Funktionen von x haben, oder auf diese Form gebracht werden können *).

§. 15.

In diesen Gleichungen, welche nicht mehr (ganz allgemeine) Formgleichungen sind, sondern nur unter der Voraussetzung gelten, daß beide Seiten der Gleichung eine und dieselbe reelle oder imaginäre Zahl von der Form $p+q\cdot i$ vorstellen und welche man deshalb Zahlengleichungen nennen kann, fangen die Begriffe des Unendlichgroßen und des Unendlichkleinen an, entschiedene Bedeutung zu gewinnen. — Wir unterscheiden aber das reelle Unendlich-Große und Kleine, von dem imaginären.

Wir nennen jede reelle Zahl ($\pm a$) positiv oder negativ

*) Dies ist also z. B. der Fall, so wie man, wenn z positiv und unendlich groß gedacht wird, 0 statt e^{-z}, oder 0 statt a^{+z} gesetzt hat, wenn $a<1$ und positiv gedacht worden, — weil nach den allgemeinen Gesetzen $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$ nie $=0$ wird, und eben so wenig a^z je der Null gleich ist, obwohl e^{-z} und a^z unendlich-klein werden können.

Eben so wenig darf man im Allgemeinen $-\infty$ statt $\log 0$, oder 0 statt $\frac{1}{\log 0}$, oder 0 statt 0^x schreiben u. d. gl. m. (obgleich dies alles erlaubt wäre, wenn man 0 mit $\frac{1}{\infty}$ vertauschen dürfte und x positiv wäre), wenn man nicht gleichzeitig auf jede sichere und gesicherte Formen-Rechnung verzichten will. — So wie man sich eine dieser Substitutionen erlaubt, welche durch die allgemeinen Gesetze der Operationen nicht gerechtfertigt sind, so muß man durch beide Seiten der Gleichung dann einen und denselben Ziffern-Werth vorgestellt sich denken, der entweder reell oder imaginär und von der Form $p+q\cdot i$ ist; also kann dann auch eine unendliche Reihe nicht mehr als solche, d. h. nicht mehr in ihr das Fortschreitungsgesetz, sondern sie selbst nur als ein bestimmter reeller oder imaginärer Ziffernwerth in Betracht kommen.

$\left\{\begin{matrix}\text{unendlich groß}\\ \text{unendlich klein}\end{matrix}\right\}$, wenn ihr absolutes Glied (a) immer noch $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ gedacht wird, als jede bereits noch so $\left\{\begin{matrix}\text{groß}\\ \text{klein}\end{matrix}\right\}$ gedachte aber bestimmte absolute Zahl; und während wir die unendlich große Zahl durch $+\infty$ bezeichnen, kann die unendlich kleine Zahl durch den Bruch $\frac{1}{\infty}$ ausgedrückt werden. Dabei sind die Begriffe „größer“ und „kleiner“ stets nur im analytischen Sinne, nämlich so zu verstehen, wie solches kurz vorher (§. 14.) festgesetzt worden ist.

Wir nennen dagegen jede imaginäre Zahl $a+b\cdot i$ $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich groß}\\ \text{unendlich klein}\end{matrix}\right\}$, wenn, nachdem sie auf die Form $\varrho\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)$ gebracht ist, ihr Modul ϱ d. h. $+\sqrt{a^2+b^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich groß}\\ \text{unendlich klein}\end{matrix}\right\}$ ist.

Uebrigens muß man das Unendlich-Kleine stets von dem sehr Kleinen eben so sorgfältig unterscheiden, wie von der Null. Was von dem Unendlich-Kleinen bewiesen wird, gilt deshalb noch nicht von dem sehr Kleinen, eben so wenig wie von der Null *).

§. 16.

Es ist nun Folgendes zu beachten:

1) Wie sehr klein eine (gebrochene oder irrationale aber) positive Zahl z auch immer gedacht seyn mag, so liegen zwischen ihr und der Null doch immer noch unendlich viele andere Zahlen,

---

*) Verstehen wir aber in den Anwendungen der Analysis auf die Vergleichung der Größen, die benannte Zahl a Rthlr. oder a ℔., sobald $a = 0$ wird, jedesmal so, daß nun gar kein Geld oder gar kein Gewicht vorhanden ist, so kann man in denselben Anwendungen statt des unendlich kleinen a auch Null setzen, weil der unendlich kleine Theil des Thalers oder des Pfundes, so gut als gar kein Geld oder gar kein Gewicht ist.

alle einander ungleich, aber alle größer als Null und kleiner noch als diese noch so kleine aber bestimmte Zahl z.

2) Ist x unendlich klein, reell oder imaginär, so sind auch px, qx^2, rx^3, ꝛc. unendlich klein, wenn nur p, q, r, ꝛc. nicht Null, sondern beliebige reelle oder imaginäre endliche (d. h. völlig bestimmte) Zahlformen sind.

Denn, ist $x = \varrho\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi) = \varrho\cdot e^{\varphi\cdot i}$, so ist $x^2 = \varrho^2\cdot e^{2\varphi\cdot i} = \varrho^2\cdot(Cos\,2\varphi+i\cdot Sin\,2\varphi)$, u. s. w. f.; und ist $p = \alpha\cdot(Cos\,\psi+i\cdot Sin\,\psi) = \alpha\cdot e^{\psi\cdot i}$, so ist $px^2 = \alpha\varrho^2\cdot e^{(2\varphi+\psi)\cdot i} = \alpha\varrho^2\cdot[Cos(2\varphi+\psi)+i\cdot Sin(2\varphi+\psi)]$; u. s. w. f. — Und wäre $px = z$ und endlich, so wäre $x = \frac{z}{p}$ auch endlich, was gegen die Voraussetzung; u. s. w. f.

3) Ist x positiv unendlich klein, so ist $x\cdot Lx$ stets negativ unendlich klein (aber nie $=0$). — Und deshalb ist allemal auch $\frac{Lz}{z}$ positiv unendlich klein, so oft z selbst positiv unendlich groß gedacht wird.

Als Zahlengleichung kann man daher schreiben

$$x\cdot Lx = -\frac{1}{\infty} \quad \text{für} \quad x = \frac{1}{\infty}$$

und

$$\frac{Lz}{z} = +\frac{1}{\infty} \quad \text{für} \quad z = \infty;$$

man muß aber nie den Sinn übersehen, in welchem diese Gleichungen gelten.

Denn, es ist $\frac{1}{v}\cdot L\frac{1}{v} = -\frac{Lv}{v}$, wo v positiv gedacht ist. — Wird nun $Lv = y$, also $v = e^y$ gesetzt, so hat man

$$\frac{1}{v}\cdot L\frac{1}{v} = -\frac{Lv}{v} = -\frac{y}{e^y} = -\frac{y}{1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{y}+1+\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots}$$

woraus die Behauptung hervorgeht, sobald man $v = \frac{1}{x} = z = \infty$, und demnach auch $y = \infty$ sich denkt.

4) Die Potenz x^x, so lange x positiv, ist allemal positiv und $\gtreqless 1$, je nachdem $x \gtreqless 1$ ist; dieselbe Potenz x^x nähert sich aber der Einheit ohne Ende und ist zuletzt um ein Unendlich-Kleines von ihr verschieden, wenn x (positiv) immer kleiner und zuletzt unendlich klein wird. — Als Zahlengleichung kann man daher schreiben:

$$x^x = 1 \quad \text{für} \quad x = \frac{1}{\infty} \text{ *)}.$$

Denn man setze $x^x = z$, so ist $x \cdot Lx = Lz$; folglich wird (nach Nr. 3.) Lz für $x = \frac{1}{\infty}$ negativ unendlich klein, d. h. $Lz = -\frac{1}{\infty}$, folglich $z = e^{-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{e^{+\frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2\infty^2}+\cdots}$ d. h. unendlich nahe $= 1$.

§. 17.

Von dem relativ Unendlich-Großen und Unendlich-Kleinen.

1) Ist der Quotient $\frac{b}{a}$ unendlich klein, so nennen wir „a unendlich groß gegen b", und „b unendlich klein gegen a", auch wenn a an sich nicht unendlich groß ist, z. B. wenn $b = q\varkappa^2$, $a = p\varkappa$, also $\frac{b}{a} = \frac{q}{p}\varkappa$ und $\varkappa$ unendlich klein gedacht ist. — Dies soll auch gelten, wenn a oder b, oder beide imaginär sind.

2) Sind m, p, q, r, s, 2c. 2c. reelle oder imaginäre endliche Zahlen aber nicht Null, und ist $\varkappa$ unendlich klein gedacht (reell oder imaginär), so ist $p\varkappa$ unendlich klein gegen m,
$q\varkappa^2$ unendlich klein gegen $p\varkappa$,
$r\varkappa^3$ unendlich klein gegen $q\varkappa^2$,

---

*) Schriebe man $0^0 = 1$ und verstünde man diese Gleichung in obigem Sinne, so wäre sie natürlich richtig; schlechthin dagegen betrachtet ist 0^0 im Kalkul gar nicht zulässig, weil schon 0^x nicht zulässig ist. — Uebrigens nimmt x^x von $x = \frac{1}{\infty}$ bis zu $x = \frac{1}{e}$ hin stetig ab und wächst wieder ununterbrochen von $x = \frac{1}{e}$ an bis zu $x = \infty$.

u. s. w. f.; aber es ist auch, wenn μ und ν ganz oder gebrochen sind und $\mu<\nu$ ist, der Werth qx^{ν} unendlich klein gegen px^{μ}; also letzteres unendlich groß gegen das erstere, obgleich an sich beide unendlich klein seyn können.

3) Man theilt daher die unendlich kleinen Zahlen (die imaginären wie die reellen) unter sich in Ordnungen und rechnet qx^{μ} zur μ^{ten} Ordnung (wo μ ganz oder gebrochen), während x selbst zur ersten Ordnung gerechnet wird. Man rechnet ferner zwei Unendlich-Kleine a und b zu „einer und derselben Ordnung", wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ einen endlichen Werth hat.

4) Da der Werth der für $z \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ allemal convergenten Reihe

$$p \cdot z^n + q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + \cdots \quad \text{immer} \quad < 2A \cdot z^n$$

ist, wenn A den größesten der reellen Koefficienten p, q, r, ꝛc. vorstellt und $z<\frac{1}{2}$ ist und p, q, r, ꝛc. endlich und reell gedacht werden, so ist dieselbe unendliche Reihe allemal ein Unendlich-Kleines der n^{ten} Ordnung, sobald z reell und unendlich klein gedacht wird, so lange nur der Koefficient p nicht Null ist. — Also hat dieselbe Reihe allemal einen endlichen Werth, so oft noch $n = 0$ ist, so lange nur p nicht Null ist.

Dasselbe läßt sich nun aber auch erweisen, wenn z imaginär unendlich klein ist, von der Form $\varrho \cdot (Cos\, \psi + i \cdot Sin\, \psi)$, weil sich dann alles Gesagte wiederholen läßt und gültig bleibt.

5) Das Analoge gilt offenbar von der Reihe

$$p \cdot x^{\mu} + q \cdot x^{\nu} + r \cdot x^{\varrho} + \cdots,$$

welche unendlich klein von der μ^{ten} Ordnung ist, so oft μ, ν, ϱ ꝛc. ꝛc. beliebig ganz oder gebrochen aber positiv und der Reihe nach wachsend gedacht werden.

6) Der Definition der Nr. 3. zufolge gelten aber die Sätze der Nr. 4. und Nr. 5. auch noch, wenn p, q, r, ꝛc. ebenso wie x beliebig reell oder imaginär sind, wenn nur x unendlich klein und in Nr. 5. μ, ν, ϱ, ꝛc. positiv und wachsend gedacht sind.

§. 18.

I. Hat man unter der Voraussetzung, daß x unendlich klein ist und alle Koefficienten reell oder imaginär sind, die Gleichung

$$a+b\cdot x+c\cdot x^2+\cdots+p\cdot x^{n-1}+q\cdot x^n = a'+b'\cdot x+c'\cdot x^2+\cdots+p'\cdot x^{n-1}+q'\cdot x^n,$$

so sind nothwendig die Koefficienten der gleichnamigen Potenzen von x, auf beiden Seiten der Gleichung einzeln einander gleich. — Und dies gilt für jede noch so große Zahl n.

Denn, wäre nicht $q = q'$, so ließe sich x^n aus der Gleichung finden in einer nach Potenzen von x fortlaufenden Reihe bis zu x^{n-1} hin, und dann wäre das Unendlich-Kleine der n^{ten} Ordnung zugleich ein Unendlich-Kleines einer niedrigern Ordnung, welches ein Widerspruch ist. — Eben so beweist sich nun, daß auch $p = p'$, u. s. w. f. seyn müsse.

II. Ist daher x unendlich klein, so folgt aus der Gleichung

$$A+B\cdot x+C\cdot x^2+D\cdot x^3+\cdots = 0$$

sogleich auch noch

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=0, \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

III. Endlich sieht man noch leicht ein, daß die letzteren Gleichungen

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=0, \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

auch dann noch statt finden müssen, wenn gegeben seyn sollte die Gleichung

$$A+B\cdot x^\mu+C\cdot x^\nu+D\cdot x^\varrho+\cdots = 0,$$

während $0<\mu<\nu<\varrho<$ ꝛc. und x unendlich klein vorausgesetzt wird.

IV. Diese Wahrheiten kann man auch so aussprechen:

In jeder Gleichung, in welcher die Glieder nach den ganzen oder gebrochenen aber positiven Potenzen eines Unendlich-Kleinen (x) geordnet sind, kann man immer alle Glieder, welche mit einer und derselben Potenz des Unendlich-Kleinen (x) afficirt sind, allein beibehalten, und alle übrigen, mit höhern oder niedrigern Potenzen des unendlich-kleinen x afficirten

Glieder außer Acht lassen; immer hat man dann eine richtige Gleichung, nämlich eine der in I., II. oder III. erhaltenen Gleichungen $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, ꝛc. oder $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ꝛc. ꝛc.

Anmerkung. Dieser vorstehende Paragraph, und namentlich die eben in IV. gemachte Aussage, ist die Grundlage der Rechnung mit Unendlich-Kleinen, d. h. der sogenannten Infinitesimal-Rechnung, d. h. der Leibnitz'schen Differential-Rechnung. Mittelst dieses Satzes ist man überzeugt, daß wenn man in der Infinitesimal-Rechnung höhere Potenzen des Unendlich-Kleinen gegen niedrigere Potenzen desselben außer Acht läßt, nicht Näherungs-Resultate entstehen, sondern vollkommen genau richtige.

§. 19.

Von dem imaginären Unendlich-Kleinen und Großen ist noch Nachstehendes wichtig:

In jeder Zahlengleichung (wo also beide Seiten eine und dieselbe Zahl $p+q\cdot i$ ausdrücken, die entweder reell ist (für $q = 0$) oder imaginär) kann man, wenn a reell ist und endlich, $\varkappa$ dagegen positiv oder negativ unendlich klein,

1) statt $a+\varkappa$ bloß schreiben a
2) statt $a+\varkappa\cdot i$ bloß schreiben a

und 3) statt $\varkappa+a\cdot i$ bloß schreiben $a\cdot i$,

wenn nur, indem man 0 statt $\varkappa$ schreibt, keiner der Ausdrücke eine in der Rechnung unzulässige Form annimmt.

Denn unter der letztern Voraussetzung läßt sich jede Seite der (Zahlen)-Gleichung nach steigenden und positiven Potenzen von $\varkappa$ entwickeln, so daß jede Seite der Gleichung die Form

$$P_0+P_1\cdot\varkappa^\mu+P_2\cdot\varkappa^\nu+P_3\cdot\varkappa^\varrho+\cdots$$
$$+i\cdot(Q_0+Q_1\cdot\varkappa^\mu+Q_2\cdot\varkappa^\nu+Q_3\cdot\varkappa^\varrho+\cdots$$

annehmen wird. Die Gleichung selbst zerfällt daher nun in zwei Gleichungen von der Form

$$P_0+P_1\cdot\varkappa^\mu+P_2\cdot\varkappa^\nu+\cdots = P_0'+P_1'\cdot\varkappa^\mu+P_2'\cdot\varkappa^\nu+\cdots$$

und $$Q_0+Q_1 \cdot x^\mu+Q_2 \cdot x^\nu+\cdots = Q_0'+Q_1' \cdot x^\mu+Q_2' \cdot x^\nu+\cdots;$$

und diese gehen für $x = \frac{1}{\infty}$ in $P_0 = P_0'$ und $Q_0 = Q_0'$ über, welche man sogleich auch erhalten haben würde, wenn man gleich anfänglich 0 statt x gesetzt hätte.

Damit steht aber in nothwendiger Verbindung: In solchen Gleichungen, wo das reelle und imaginäre Unendlich-Kleine (x oder $x \cdot i$) gegen das Endliche außer Acht gelassen werden kann, kann man auch

4) gegen das reelle Unendlich-Große $\pm\infty$, jede endliche reelle oder imaginäre Zahl a oder $a \cdot i$ außer Acht lassen; d. h. man kann statt $\pm\infty+a$ und auch statt $\pm\infty+a \cdot i$ bloß $\pm\infty$ schreiben; aber man kann auch

5) gegen das imaginäre Unendlich-Große von der Form $\pm\infty \cdot i$ das endliche reelle oder imaginäre a oder $a \cdot i$ außer Acht lassen, d. h. man kann statt $a \pm \infty \cdot i$ bloß $\pm\infty \cdot i$ schreiben.

Zweite Abtheilung.

Differentiale. Integrale. Gang der reellen Werthe einer Funktion.

§. 20.

1) Unter ∂F_x verstehen wir diejenige Funktion von x, welche dem Quotienten $\frac{dF}{dx}$ der zusammengehörigen unendlich kleinen Zuwachse von x und F_x gleich ist, d. h. welche den Werth dieses Quotienten ausdrückt. Wir nennen diese Funktion ∂F_x die Ableitung oder den (ersten) Differential-Koefficienten von F_x nach x.

Wir gebrauchen also stets die runden ∂ um (in ∂F_x) die Reihe von Operationen zu bezeichnen, welche mit einer Funktion (F_x) vorgenommen werden müssen, um diese neue Funktion (∂F_x) von x, zu erhalten. — Dagegen gebrauchen wir stets ste-

hende d, wenn durch dx, dF unendlich kleine Zuwachse (Differentialien) bezeichnet werden sollen.

2) Wir bezeichnen durch $\int f_x \cdot dx$ oder $\int f \cdot dx$ jede Funktion φ_x, deren **Ableitung** $\partial\varphi_x$ der Funktion f_x gleich ist, oder deren unendlich kleiner Zuwachs $d\varphi$, welcher zu dem unendlich kleinen Zuwachs dx (von x) gehört, durch $f \cdot dx$ ausgedrückt sich sieht.

3) Wenn $\int f_x \cdot dx = \varphi_x$ gefunden worden ist, so drückt $\varphi_b - \varphi_a$ die Summe aller unendlich vielen, unendlich kleinen Produkte aus, welche aus $f_x \cdot dx$ hervorgehen, wenn man $dx = \frac{b-a}{n}$ nimmt, dabei n unendlich groß sich denkt, und nun statt x (in f_x) nach und nach alle, um dieses unendlich-kleine dx wachsende Werthe setzt, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin; so oft nämlich diese Summe einen bestimmten endlichen Werth hat. (Vgl. IV. Th. d. Syst. d. Math. §. 161. b.). — Diese Differenz $\varphi_b - \varphi_a$ wird von uns durch $\int_{b \dotplus a} f \cdot dx$ bezeichnet und ein **bestimmtes**, „zwischen den Grenzen a und b von x genommenes" **Integral** genannt. — Später, wo wir einen Unterschied zwischen $\int_{b \dotplus a} f \cdot dx$ und $\int_a^b f \cdot dx$ machen müssen, nennen wir das erstere ein **allgemein-bestimmtes**, das letztere dagegen ein **numerisch-bestimmtes**.

4) Der Werth von $\int_{b \dotplus a} (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx$ liegt immer zwischen $K \cdot \int_{b \dotplus a} \psi_x \cdot dx$ und $G \cdot \int_{b \dotplus a} \psi_x \cdot dx$, wenn K und G bezüglich der kleinste und der größeste Werth von φ_x ist, unter allen Werthen, welche die Funktion φ_x annimmt, wenn statt x nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt werden, die zwischen a und b liegen, **wenn nur** ψ_x **von** $x = a$ an **bis** $x = b$ **hin sein Vorzeichen nicht ändert d. h. stets positiv oder stets negativ bleibt***).
(S. Th. V. d. Syst. d. Math. §. 238.).

---

*) Ist nämlich x irgend ein Zwischen-Werth zwischen a und b, — ist dabei ψ_x stets **positiv**, — so ist für **jeden** Werth von x, der zwischen

5) Nimmt man den Taylor'schen Lehrsatz in dieser Form an

$$y_x = y_\alpha + \partial y_\alpha \cdot \frac{x-\alpha}{1} + \partial^2 y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial^{n-1} y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + E_x,$$

wo y_α, ∂y_α, $\partial^2 y_\alpha$, 2c. 2c. das bedeuten, was aus y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ hervorgeht, wenn man α statt x schreibt, so findet sich (nach Th. V. des Syst. d. Math. §. 236.), das Ergänzungsglied

$$E_x = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x \div \alpha} (x-z)^{n-1} \cdot \partial^n y_z \cdot dz;$$

folglich liegt (nach Nr. 4.)

$$E_x \text{ zwischen } K \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \text{ und } G \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!},$$

wenn K und G der kleinste und größte Werth von $\partial^n y_x$ ist, von $x = \alpha$ an bis zu $x = x$ hin; — oder es liegt (ebenfalls nach Nr. 4., wenn man die Faktoren vertauscht)

$$E_x \text{ zwischen } K_1 \cdot \frac{\partial^{n-1} y_x - \partial^{n-1} y_\alpha}{(n-1)!} \text{ und } G_1 \cdot \frac{\partial^{n-1} y_x - \partial^{n-1} y_\alpha}{(n-1)!},$$

wenn K_1 und G_1 bezüglich der kleinste und größeste Werth von $(x-z)^{n-1}$ ist, von $z = \alpha$ an bis zu $z = x$ hin, und wenn noch $\partial^{n-1} y_x$ von $x = \alpha$ an bis zu $x = x$ hin stets einerlei Vorzeichen behält, d. h. stets positiv ist, oder stets negativ bleibt.

Setzt man $\alpha = 0$, so hat man den gemeinen Maclaurin'schen Lehrsatz; — setzt man aber h statt $x-\alpha$ oder $\alpha + h$ statt x, und zuletzt x statt α, so hat man den Taylor'schen Lehrsatz, jeden mit dem (von Lagrange zuerst bestimmten) Ergänzungsgliede. — (Vgl. V. Th. d. Syst. d. Mathem. §§. 239. 240.).

---

a und b liegt, allemal $\varphi_x \cdot \psi_x \cdot dx > K \cdot \psi_x \cdot dx$, aber $< G \cdot \psi_x \cdot dx$; und daher ist auch die Summe aller $\varphi_x \cdot \psi_x \cdot dx$ stets größer als die Summe aller $K \cdot \psi_x \cdot dx$ (d. h. größer als $K \cdot \int_{b \div a} \psi \cdot dx$), aber kleiner als die Summe aller $G \cdot \psi_x \cdot dx$ (d. h. kleiner als $G \cdot \int_{b \div a} \psi_x \cdot dx$). — Analoges, wenn ψ_x stets negativ ist.

§. 21.

Die reellen Werthe einer Funktion f_x wachsen stetig mit den reellen Werthen von x zugleich, so lange für letztere der Differential-Koefficient ∂f_x $\left(\text{oder } \frac{df}{dx}\right)$ positiv ist; dagegen nehmen die ersteren stetig ab, während die letzteren stetig wachsen, so lange ∂f_x negativ wird; endlich da wo die Werthe von ∂f_x bei stetig wachsend gedachten reellen Werthen von x, vom $\left\{\begin{matrix}\text{Positiven}\\ \text{Negativen}\end{matrix}\right\}$ zum $\left\{\begin{matrix}\text{Negativen}\\ \text{Positiven}\end{matrix}\right\}$ übergehen, da gehen die zugehörigen reellen Werthe von f_x aus dem Zustande des stetigen $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsens}\\ \text{Abnehmens}\end{matrix}\right\}$ in den des stetigen $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmens}\\ \text{Wachsens}\end{matrix}\right\}$ über, und an derselben Stelle liegt dann ein sogenannter $\left\{\begin{matrix}\text{größter}\\ \text{kleinster}\end{matrix}\right\}$ Werth von f_x $\left(\text{ein } \begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right)$, wenn nicht f_x an dieser Stelle ihre Stetigkeit unterbricht, d. h. wenn nicht die Funktion f_x für diesen Werth von x eine Rechnungsform wird, welche im Kalkul nicht mehr zulässig ist (also z. B. 0^a, während a negativ oder Null ist, oder $\frac{b}{0}$, *log* 0, oder dgl.), oder vom Reellen zum Imaginären übergeht *).

Während aber die reellen Werthe von x stetig wachsend gedacht werden, können die zugehörigen Werthe einer Funktion f_x alle reell, oder alle imaginär, oder abwechselnd reell und

---

*) Nach älteren Ansichten unterbricht eine Funktion schon an jeder solchen Stelle ihre Stetigkeit, wo sie vom Reellen zum Imaginären, oder vom Imaginären zum Reellen übergeht. Nach unseren und den neueren Ansichten muß man aber annehmen, daß z. B. $\sqrt{a-x}$ nie ihre Stetigkeit unterbricht, obgleich sie für $x = a$ vom Reellen zum Imaginären übergeht; während bei der Funktion $\frac{1}{\sqrt{a-x}}$, für $x = a$ allerdings eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet. — Wir bitten unsere geneigten Leser darauf besonders zu achten.

imaginär seyn, also aus dem Zustande des $\left\{\begin{matrix}\text{Reellen}\\ \text{Imaginären}\end{matrix}\right\}$ in den des $\left\{\begin{matrix}\text{Imaginären}\\ \text{Reellen}\end{matrix}\right\}$ übergehen.

Alle die Werthe von x, für welche solche Uebergänge der Funktion f_x vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen, oder vom Reellen zum Imaginären, oder vom Imaginären zum Reellen statt finden, ergeben sich aber, wenn man entweder f_x selbst, oder die in f_x vorkommenden Nenner, Dignanden und Logarithmanden*) einzeln der Null gleich setzt, — aus diesen Gleichungen die zugehörigen Werthe von x findet, und für jeden einzelnen α dieser Werthe prüft, ob die Funktion f_x an dieser Stelle überhaupt einen dieser Uebergänge hat und welchen? — und zwar dadurch, daß man die Werthe $f_{\alpha-\varkappa}$ und $f_{\alpha+\varkappa}$ direkt mit einander vergleicht, zur Vergleichung aber $f_{\alpha+\varkappa}$ in eine nach steigenden (ganzen oder gebrochenen, positiven) Potenzen des unendlich klein gedachten $\varkappa$ entwickelt.

Hinsichtlich der Zusammenstellung solcher Entwickelungen und der Lehren von den unendlichen Reihen überhaupt, betrachte man nun die nächste erste Abhandlung des gegenwärtigen Bandes.

---

*) In der Potenz a^b heißt a der **Dignand**; in dem Logarithmen *log* a, nennen wir a den **Logarithmanden**.

Erste Abhandlung.

Altes und Neues von den unendlichen Reihen.

Erstes Kapitel.

Entwickelungen in unendliche Reihen.

1) Eine algebraische Summe von unendlich vielen Gliedern, die bis ins Unendliche nach einem und demselben Gesetze fortschreiten, wurde eine unendliche Reihe genannt.

2) Das Gesetz, nach welchem die Glieder derselben bis ins Unendliche fortschreiten, ist entweder rekurrent gegeben, oder independent; rekurrent wird es genannt, wenn mittelst desselben die folgenden Glieder der Reihe aus einem, mehreren oder allen vorhergehenden Gliedern bestimmt werden; independent heißt es, wenn eine Funktion von n gegeben wird, welche das n^{te} Glied der Reihe vorstellt, so daß man außer der Ordnung jedes Glied für sich und unabhängig von jedem andern angeben kann.

Anmerk. 1. Man kann sich die Aufgaben stellen: a) wenn ein rekurrentes Gesetz des Fortschreitens einer unendlichen Reihe gegeben ist, daraus ihr independentes Gesetz zu finden; und b) aus dem gegebenen independenten Gesetze des Fortschreitens ein rekurrentes Gesetz herzuleiten.

Als im II. Th. d. Syst. §. 601. eine unendliche Reihe

$$f_x = A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

gesucht wurde, welche die Eigenschaft hat, daß

$$f_x \cdot f_y = f_{x+y}$$

wird, — da fand sich mittelst der Methode der unbestimmten Koefficienten, das rekurrente Gesetz

$$n \cdot A_n = A^1 \cdot A_{n-1}$$

für jede ganze Zahl n gültig. Indem man nun in dieser Gleichung statt n

nach und nach 1, 2, 3, ... $n-1$, n setzte und alle die entstehenden Gleichungen mit einander multiplicirte, ergab sich das independente Gesetz

$$A_n = \frac{c^n}{n!},$$

indem man den ersten Koefficienten A_1 willkührlich annahm und $= c$ setzte.

Ein anderes Mal war der binomische Lehrsatz durch ein independentes Gesetz gegeben, nämlich

$$(a+b)^m = S\left[\frac{m^{b|-1}}{b!} \cdot a^{m-b}b^b\right] \text{*)};$$

um nun daraus ein rekurrentes Gesetz abzuleiten, kann man in diesem allgemeinen (b^{ten}) Gliede statt b zuerst n, dann auch statt b die Zahl $n+1$ setzen und man erhält, wenn T_n und T_{n+1} das n^{te} und $(n+1)^{te}$ Glied der Binomial-Reihe vorstellen,

$$T_n = \frac{m^{n|-1}}{n!} \cdot a^{m-n}b^n$$

und

$$T_{n+1} = \frac{m^{n+1|-1}}{(n+1)!} \cdot a^{m-n-1}b^{n+1}.$$

Dividirt man nun diese beiden Gleichungen durch einander, so erhält man die Gleichung

$$T_{n+1} = \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_n$$

als ein rekurrentes Gesetz der Binomialreihe, nach welchem jedes folgende $n+1^{te}$ Glied derselben (nämlich T_{n+1}) aus dem vorhergehenden n^{ten} Gliede derselben (nämlich T_n) gefunden wird.

Fassen wir das letztere Verfahren allgemeiner auf, so erhellt, daß, wenn das x^{te} Glied T_x einer Reihe bekannt ist, also ihr independentes Gesetz, man sich dann Gleichungen, wie

$$T_x = a, \quad T_{x-1} = b, \quad T_{x-2} = c, \quad \text{u. s. w.}$$

in beliebiger Anzahl verschaffen kann, und daß dann jede Kom-

---

*) Wegen der Bezeichnung sehe man stets die Einleitung und die Vorrede nach. — Wir schreiben hier häufig statt einer unendlichen Reihe ihr allgemeines Glied mit dem vorgesetzten S als Zeichen der Summe. In dem allgemeinen Gliede bedeuten immer die kleinen deutschen Buchstaben nach und nach 0, 1, 2, 3 und alle positiven ganzen Zahlen.

bination dieser Gleichungen, namentlich also auch jede Elimination irgend eines oder mehrerer der in ihnen vorkommenden gemeinschaftlichen Ausdrücke, zu einer Gleichung zwischen T_x, T_{x-1}, T_{x-2}, 2c. 2c. führen wird, d. h. zu einem rekurrenten Gesetze derselben unendlichen Reihe, durch welches das x^{te} Glied dieser Reihe (T_x) in das $(x-1)^{te}$ und $(x-2)^{te}$ 2c. 2c. Glied derselben Reihe ausgedrückt sich sieht.

Faßt man aber die erstere Aufgabe (a) allgemein auf, so ist sie keine andere als: wenn man von einer Funktion T_x eine Eigenschaft kennt, und zwar eine Gleichung zwischen T_x, T_{x-1}, T_{x-2}, 2c. 2c., — daraus die Funktion T_x selbst zu finden. — Wäre diese Gleichung, statt zwischen T_x, T_{x-1}, T_{x-2}, 2c. (d. h. statt zwischen Werthen von T_x, die zu Werthen von x gehören, welche um etwas endliches, nämlich um 1 von einander verschieden sind) gegeben zu seyn, zwischen T_x, T_{x-dx}, $T_{x-2\cdot dx}$, 2c. (d. h. zwischen solchen Werthen von T_x, welche zu nächst auf einander folgenden Werthen von x gehöten) gegeben, so würde die Gleichung eine sogenannte Differential-Gleichung seyn und die Integration derselben würde dann die verlangte Funktion T_x liefern. — So wie sie aber hier vorkommt, gehört die Gleichung zu denen, welche wir in der nächsten zweiten Abtheilung dieses Bandes unter dem Namen der „endlichen Differenzen-Gleichungen" in Betrachtung ziehen werden, und es wird ein Geschäft der eben am angeführten Orte zu lehrenden „endlichen Summen-Rechnung" (oder „endlichen Integral-Rechnung") seyn, aus einer solchen Gleichung die Funktion T_x selbst wirklich herzustellen.

Anmerk. 2. Unendliche Reihen, deren rekurrentes Gesetz durch eine lineäre Gleichung, d. h. durch eine Gleichung (zwischen den Koefficienten A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, ⋯ A_{n-m} der Reihe) von der Form

$$b_0 \cdot A_n + b_1 \cdot A_{n-1} + b_2 \cdot A_{n-2} + \cdots + b_m \cdot A_{n-m} = K_n$$

ausgedrückt ist (mittelst welcher das n^{te} Glied A_n in die vorhergehenden Glieder A_{n-1}, A_{n-2}, ⋯ bis zu A_{n-m} hin aus-

gedrückt sich sieht, werden in der Geschichte der Mathematik rekurrirende Reihen genannt (S. II. Th. d. S. §. 568.) und sie haben ihre Benennung offenbar deshalb erhalten, weil man dazumal der irrigen Ansicht war, daß diese Reihen es allein sind, die sich eines rekurrenten Fortschreitungs-Gesetzes ihrer Glieder erfreuen. Diese letztgenannten Reihen sind die Entwickelungen von gebrochenen Funktionen von der Form

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{1+k_1x+\cdots}{1+ax+bx^2},\qquad \frac{p}{q}\cdot\frac{1+k_1x+k_2x^2+\cdots}{1+ax+bx^2+cx^3},\quad \text{u. s. w. f.}$$

nach steigenden und ganzen Potenzen von x. — Die einfachste derselben ist die Entwickelung der einfachsten dieser gebrochenen Funktionen, nämlich von $\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{1+ax}$; sie hat das rekurrente Gesetz $C_{n+1}+a\cdot C_n = 0$ oder $C_{n+1} = -a\cdot C_n$ ihrer Koefficienten C_1, C_2, C_3, C_4, rc.; dies rekurrente Gesetz läßt sich augenblicklich in ein independentes verwandeln, wenn man in der letztern Form dieser Gleichung statt n nach und nach 0, 1, 2, 3 ⋯ n—1 setzt, alle Gleichungen mit einander multiplicirt und zuletzt daran denkt, daß $C_0 = \frac{p}{q}$ ist; man erhält dann

$$C_n = (-1)^n\cdot a^n\cdot\frac{p}{q},$$

wodurch der n^{te} Koefficient C_n unabhängig von jedem andern ausgedrückt ist.

Weil man aber den Bruch *) $\frac{1+k_1x}{1+ax+bx^2}$ in die Summe $\frac{A}{1+\alpha x}+\frac{B}{1+\beta x}$ der beiden einfachen Partialbrüche umformen kann, so ist die aus $\frac{p}{q}\cdot\frac{1+k_1x}{1+ax+bx^2}$ hervorgehende rekurri-

*) In allgemeinen Rechnungen geschieht es häufig, daß allgemeine Quotienten, Brüche genannt werden. Diese Licenz gebrauchen auch wir hier, obgleich wir an geeigneter Stelle den Bruch vom Quotienten wesentlich unterscheiden.

rende Reihe gleich der Summe der aus den Partialbrüchen $\frac{Ap}{q}\cdot\frac{1}{1+\alpha x}+\frac{Bp}{q}\cdot\frac{1}{1+\beta x}$ hervorgehenden Reihen. Addirt man daher die gefundenen unabhängigen Koefficienten von x^n in den beiden letztern Reihen, so hat man auch das independente Gesetz der ersteren Reihe.

Gerade so setzt sich aber das independente Gesetz der aus $\frac{1+k_1x+k_2x^2}{1+ax+bx^2+cx^3}$ hervorgehenden sogenannten rekurrirenden Reihe zusammen durch Addition der Koefficienten von x^n der drei Reihen, in welche die 3 einfachen Partialbrüche des gegebenen Bruches entwickelt werden können, welche letzteren von der Form $\frac{A}{1+\alpha x}+\frac{B}{1+\beta x}+\frac{C}{1+\gamma x}$ seyn werden.

U. s. w. f. — Man sieht also wie es möglich ist für jede dieser sogenannten rekurrirenden Reihen auch das independente Gesetz ihres Fortschreitens zu finden.

§. 2.

Unter der Entwickelung eines allgemeinen und gegebenen Ausdrucks F in eine Reihe, versteht man die Entwickelung einer Reihe, welche dem gegebenen Ausdruck F gleich ist. (Vgl. §. 560. d. II. Th. d. S.).

Zu dieser Erklärung muß aber folgende Erläuterung hinzugefügt werden. Nach dem I. Th. d. S. sind zwei Ausdrücke einander gleich, wenn beide, nachdem sie auf dieselbe Weise und so operirt werden, daß alle indirekten Operationszeichen wegfallen, zuletzt einen und denselben Ausdruck liefern *). Dieser allgemeinste Charakter der Gleichung setzt,

*) In diesem Sinne ist

$$\sqrt[3]{1} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

weil jeder der beiden Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens, wenn er mit 3 potenzirt wird, ein und dasselbe Resultat, nämlich 1 liefert. — Diese Gleichung ist aber eine unvollständige (unvollkommene), weil der Ausdruck links drei Werthe hat, der zur Rechten aber nur einen oder höchstens zwei.

wenn der eine dieser Ausdrücke eine Reihe ist, voraus, daß man mit Reihen nach bestimmten Gesetzen operiren könne. Wenn dies nun auch in so ferne keinen Zweifel erleidet, als die Reihen ihrer Definition zufolge genau wie algebraische Summen behandelt werden müssen, so kann man doch, wenn das Ordnen der Resultate nicht entschieden vorgeschrieben ist, möglicherweise für ein und dasselbe Resultat verschiedene Fortschreitungs-Gesetze erhalten, je nachdem man so oder anders ordnet.

Daher verlangen wir als erstes Erforderniß, wenn mit einer unendlichen Reihe als solcher soll sicher „gerechnet" werden können, daß sie die Form einer algebraischen rationalen ganzen Funktion eines (Fortschreitungs-)Buchstabens (x) aber vom unendlichen Grade, habe, oder doch auf eine solche Form gebracht werden könne *). — In ihr wird wenigstens der Fortschreitungs-

---

In diesem Sinne ist auch

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+ \text{ in inf.},$$

so lange nur x ganz allgemein, ganz inhaltlos d. h. als ein bloßer Träger der Operationszeichen gedacht wird, — eine richtige Gleichung, weil, wenn man links und rechts mit $1-x$ multiplicirt, links die Einheit, rechts aber die Einheit und noch zwei ohne Ende fortlaufende Reihen von Gliedern erscheinen, die sich ohne Ende fort vernichten, in so ferne nur dann ein Glied übrig bleiben würde, wenn man die Reihe abgebrochen, also nicht mehr als unendliche Reihe sich dächte.

*) Setzt man in der Reihe

$$A_0+A_1 \cdot x+A_2 \cdot x^2+A_3 \cdot x^3+\ldots$$

$\frac{1}{z}$ oder $y^{\frac{m}{n}}$, oder $v^{-\frac{m}{n}}$ statt x, so erhält man Reihen, die nach negativen ganzen Potenzen von z, oder nach positiven oder negativen gebrochenen Potenzen von y oder v fortlaufen. Auch bekommt man schon Reihen, die nach gebrochenen Potenzen fortlaufen, sobald man nur die vorliegende mit $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ multiplicirt, wo $\frac{\mu}{\nu}$ positiv oder negativ gebrochen gedacht ist. — Aber es ist jedesmal leicht, solche Reihen auf ihre ursprüngliche Gestalt wieder zurückzuführen.

Buchstabe (x) ganz allgemein, ganz inhaltlos, d. h. als bloßer Träger der Operationszeichen vorausgesetzt *).

§. 3.

Für solche allgemeine, nach ganzen Potenzen irgend eines ganz allgemeinen Trägers x fortlaufende Reihen hat man aber die nachstehenden Sätze:

1) Sind zwei solche Reihen einander gleich, so müssen die Koefficienten ihrer gleichnamigen Potenzen einzeln einander gleich seyn.

2) Ist eine solche Reihe identisch 0, so muß jeder einzelne ihrer Koefficienten der Null gleich seyn.

Diese beiden Sätze wurden (S. §. 425. und §. 559. des II. Th. d. S.) zuerst von den ganzen Funktionen von x bewiesen, von welchem bestimmten Grade sie auch seyn mögen; dann aber auf die unendlichen Reihen ausgedehnt. — Der Beweis ist aber für den ganz überflüssig, welcher sich genau an die im vorhergehenden Paragraphen wiederholte Definition der Gleichung hält, welche die einzige ist, die in allen Fällen die richtige, welche also den allgemeinsten Begriff der Gleichung in sich schließt, wenn man nur noch vollkommene Gleichungen (deren beide Seiten unbedingt für einander gesetzt werden können, überall wo man „rechnet") von den unvollkommenen unterscheidet.

Daraus folgen aber noch die wichtigen Sätze:

3) Wenn ein eindeutiger Ausdruck f_x auf noch so vielen verschiedenen Wegen in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt worden ist, so hat man doch jedesmal genau eine und dieselbe Reihe gefunden, so daß die einzelnen Koefficienten genau dieselben seyn müssen.

---

*) Es versteht sich, daß man an die einzelnen Glieder einer jeden unendlichen Reihe

$$A_0+A_1+A_2+A_3+\cdots$$

solche Potenzen von x anhängen kann, so daß diese andere

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

daraus wird. Hat dann die erstere einen Werth, so ist solcher der Werth, den letztere für $x = 1$ annimmt.

4) Ist aber der entwickelte Ausdruck f_x mehrdeutig, so kann jede dieser Entwickelungen einem anderen seiner Werthe zugehören. Ist jedoch jede dieser Reihen eben so vieldeutig als der Ausdruck selbst, so daß jeder einzelne Werth (d. h. Form) der Reihe, auch jedesmal einem einzelnen Werthe des Ausdrucks f_x entspricht, so sind die Reihen selbst wiederum einander vollkommen gleich und daher auch in ihren einzelnen Koefficienten nicht mehr von einander verschieden, nur daß letztere ebenfalls mehrdeutige Ausdrücke seyn können und seyn werden.

§. 4.

Die Gleichungen (II. Th. d. E. §. 672.)

1) $$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+ \text{ in inf.}$$

2) $$a^x = 1+\frac{x\cdot log\, a}{1}+\frac{x^2\cdot(log\, a)^2}{2!}+\frac{x^3\cdot(log\, a)^3}{3!}+ \text{ in inf.}$$

3) $$Sin\, x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+ \text{ in inf.}$$

4) $$Cos\, x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}- \text{ in inf.}$$

sind jedoch keine Entwickelungen der endlichen Ausdrücke zur Linken, sondern Definitionen der Zeichen e^x, a^x, $Sin\, x$, $Cos\, x$.

Wir schreiben dieselben 4 Gleichungen nach unserer Bezeichnungsweise auch so:

1) $$e^x = S\left[\frac{x^a}{a!}\right];$$ 2) $$a^x = S\left[\frac{x^b\cdot(log\, x)^b}{b!}\right];$$

3) $$Sin\, x = S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right];$$

4) $$Cos\, x = S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right],$$

wodurch die Reihen vollständiger und zugleich bequemer ausgedrückt sind.

Dagegen ist die Gleichung

5) $log(1+x) = (log\,1)+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+$ in inf.

d. h. $log(1+x) = log\,1+S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}\right]$

eine Entwickelung (und zugleich eine vollkommene Gleichung, was sie nicht mehr ist, wenn man rechts statt $log\,1$ einen einzigen seiner unendlich vielen Werthe setzt, etwa den Werth Null); da $log(1+x)$ der Definition zufolge jeden Ausdruck z vorstellt, welcher $e^z = 1+x$ macht, die Reihe zur Rechten aber, wenn sie nur ohne Ende fort genommen und nicht abgebrochen wird, dieser Bedingung vollständig genügt, während x völlig inhaltslos d. h. ganz allgemein gedacht wird.

(S. II. Th. d. S. §. 663.).

Eben so ist der binomische Lehrsatz

6) $(1+x)^z = 1^z \cdot (1+z_1 \cdot x+z_2 . x^2+z_3 \cdot x^3+z_4 \cdot x^4+\cdots)$,

wo allgemein (für jede ganze positive Zahl n)

$$z_n = \frac{z^{n|-1}}{n!} = \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \cdots \quad n}$$

gedacht wird, — dieser binomische Lehrsatz also ist eine Entwickelung, welche aus der Definition der Potenz $(1+x)^z$ d. h. aus der Reihe

$$1+\frac{z \cdot log(1+x)}{1}+\frac{z^2 \cdot [log(1+x)]^2}{2!}+ \text{ in inf.}$$

dadurch hervorgeht, daß man statt $log(1+x)$ ihre Entwickelung (aus 5.) substituirt, und das was man nun hat, nach den steigenden Potenzen von x ordnet. — Die Gleichung 6.) ist übrigens eine vollständige (vollkommene) Gleichung; sie wird unvollständig (unvollkommen), sobald rechts statt 1^z ein bestimmter seiner unendlich vielen Werthe gesetzt wird, etwa der Werth 1.

Aus diesem binomischen Lehrsatze 6.), der auch so geschrieben werden kann

6) $(1+x)^z = 1^z \cdot S\left[\frac{z^{b|-1}}{b!} \cdot x^b\right]$

entwickelt sich nun leicht der polynomische Lehrsatz, nämlich (wenn a_0, a_1, a_2, a_3, ꝛc. ꝛc. ganz beliebige Ausdrücke vorstellen)

$$7)\quad (a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+\cdots)^z$$
$$= S\left[K\cdot a_0{}^{z-b_1-b_2-\cdots-b_n}\cdot(a_1)^{b_1}\cdot(a_2)^{b_2}\cdots(a_n)^{b_n}\times x^n\right]_{b_1+2b_2+3b_3+\cdots nb_n = n},$$

wo K statt $\dfrac{z^{b_1+b_2+\cdots+b_n|-1}}{(b_1)!\,(b_2)!\cdots(b_n)!}$ steht *).

(Vgl. II. Th. d. S. §. 686).

*) Man bemerke:

α) Die Reihe rechts ist eine unendliche, weil statt des deutschen Buchstaben n, sowohl Null als auch jede positive ganze Zahl gesetzt werden muß; — und wenn man statt n seine Werthe in ihrer Ordnung setzt, so geht die Reihe nach ganzen positiven und steigenden Potenzen von x fort.

β) Für jede bestimmte ganze positive Zahl, die man statt n gesetzt hat, suche man alle zusammengehörigen Werthe der deutschen Buchstaben b_1, b_2, ⋯ b_n, welche der Bedingungsgleichung

$$b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n = n$$

genügen, substituire dann diese zusammengehörigen Werthe nach und nach in das allgemeine Glied der Reihe, addire die entstehenden Glieder und man hat das mit x^n afficirte Glied, für diesen bestimmten Werth von n.

Betrachten wir den besondern Fall, wo das mit x^4 afficirte Glied der Entwickelung von

$$\frac{1}{1+ax+bx^2+cx^3} \text{ d. h. von } (1+ax+bx^2+cx^3)^{-1}$$

gefunden werden soll, so geht die obige Gleichung 7.) zunächst über in

$$(1+ax+bx^2+cx^3)^{-1} = S\left[\frac{(-1)^{a+b+c}(a+b+c)!}{a!\;b!\;c!}\cdot a^a\cdot b^b\cdot c^c\times x^n\right]_{a+2b+3c = n}$$

in so ferne $(-1)^{a+b+c|-1} = (-1)^{a+b+c}\cdot(a+b+c)!$ ist (nach pag. 9. Anmerkg. d. II. Th. d. S.); hiernach ist der Koeffizient des mit x^4 affizirten Gliedes dieser Reihe zur Rechten

$$(\delta)\cdots\quad = S\left[(-1)^{a+b+c}\cdot\frac{(a+b+c)!}{a!\;b!\;c!}\cdot a^a\cdot b^b\cdot c^c\right]_{a+2\cdot b+3\cdot c =}$$

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die unendlichen Reihen in allen 7 Nummern (1.—7.) durch ihr independentes Gesetz ausgedrückt sind, so daß jedes Glied derselben unabhängig von jedem anderen beliebig außer der Reihe gefunden werden kann.

§. 5.

Endlich haben wir zur Entwickelung in Reihen den Maclaurin'schen Lehrsatz, nach welchem

$$\text{I.} \qquad f_x = S\left[\partial^a f_0 \cdot \frac{x^a}{a!}\right]$$

oder

$$\text{II.} \qquad f_x = S\left[\partial^a f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right]$$

ist, sobald $\partial^a f_0$, $\partial^a f_\alpha$ bezüglich das bedeuten, was aus $\partial^a f_x$ wird, wenn man 0 oder α statt x schreibt. (Vgl. §§. 13. 14. d. III. Th. d. Syst. und §. 103. des IV. Th.).

Wir nennen den erstern Satz (I.) den gemeinen, den andern (II.) den allgemeineren Maclaurin'schen Lehrsatz.

Und wenn auch die nach x fortlaufende Reihe für f_x, Aus-

Um nun diesen Koefficienten entwickelt herzustellen, muß man zunächst alle Werthe von a, b, c suchen, welche 0 und positive ganze Zahlen sind, und welche der Gleichung

$$a+2\cdot b+3\cdot c = 4$$

genügen. Man findet (nach §. 377. d. II. Th. d. S.)

a,	b,	c
4,	0,	0
2,	1,	0
0,	2,	0
1,	0,	1

Diese Werthe werden nun nach und nach in (♀) statt a, b, c substituirt, und dadurch erhält man die 4 Glieder

$$a^4-3a^2b+b^2+2ac,$$

welche den gesuchten Koefficienten von x^4 bilden.

nahmsweise gebrochene Potenzen in sich aufnimmt, so liefert die Formel I. doch so lange die richtigen Glieder der Entwickelung, als der Ausdruck $\partial^a f_0$ noch einen bestimmten Werth annimmt, und nicht eine im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$, $log\,0$, oder dergl. (Vgl. V. Th. d. Syst. §§. 100. 101.).

Obgleich endlich der Maclaurin'sche Lehrsatz (I. II.) zur allgemeinen Entwickelung in Reihen angewandt, in der Regel sehr bedeutende Rechnungen erfordert, so haben wir doch (im 11ten Kapitel des V. Th. d. Syst.), da wo aus ihm die Variationsrechnung abgeleitet wurde, einen höchst wichtigen und vielumfassenden Fall nachgewiesen, wo seine Anwendung zu neuen Gesetzen der direkten Entwickelung in Reihen führen kann. Außer den Beispielen der erfolgreichen Anwendung dieses Satzes, welche namentlich auch im IV. Th. d. S. pag. 7. u. 9. zu finden sind, wollen wir hier in den nächsten Paragraphen noch einen andern umfassenderen Fall nachweisen *).

§. 6.

Man soll ψ_y in eine nach x fortlaufende Reihe entwickeln, während y gegeben ist in x (und in a) durch die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad y = F_{a+x\cdot\varphi_y}$$

unter der Voraussetzung, daß ψ, F und φ beliebig gegebene Funktionen (Zusammensetzungsformen) sind.

---

*) Dieser Maclaurin'sche Lehrsatz I. oder II. gilt, so lange seine Koefficienten nicht Formen aufnehmen, welche in der Rechnung unzulässig sind $\left(\frac{1}{0},\ log\,0,\ 0^0,\ \text{oder dergl.}\right)$ ganz allgemein, d. h. auch dann, wenn x ganz inhaltlos, als ein bloßer Träger der Operationszeichen gedacht wird, und nicht bloß (wie Cauchy und seine Anhänger meinen) wenn die unendliche Reihe convergent ist. Die Fälle, welche Cauchy anführt, und in denen er nicht gelten soll, beweisen nichts, da die von Cauchy nachgewiesenen Widersprüche anderen Fehlern des Cauchy ihr Daseyn verdanken. (Vergl. die Note zu pag. 21. des „Geist der Diff.- u. Integr.-Rechnung. Erlangen. 1846.)

Der Maclaurin'sche Lehrsatz (I.) giebt die einzelnen Koeffizienten dieser Reihe unmittelbar, indem man nämlich ψ, $\partial\psi_{(x)}$, $\partial^2\psi_{(x)}$, $\partial^3\psi_{(x)}$, *) rc. rc. entwickelt, und in diesen Ausdrücken Null statt x setzt. Zu gleicher Zeit erhellet, daß diese Koeffizienten Funktionen von a seyn werden.

Kommt man nun auf die Idee, diese Ableitungen nach x, sogleich in Ableitungen nach a auszudrücken, so wird man die Gleichung (⊙) nach x und nach a differenziiren, um ∂y_x in ∂y_a ausgedrückt zu erhalten. Dies giebt, wenn $a+x\cdot\varphi_y = t$ gesetzt wird,

$$1)\qquad \partial y_{(x)} = \partial F_t\cdot(\varphi + x\cdot\partial\varphi_y\cdot\partial y_{(x)})$$

$$2)\qquad \partial y_{(a)} = \partial F_t\cdot(1 + x\cdot\partial\varphi_y\cdot\partial y_{(a)}).$$

Dividirt man diese Resultate durch einander, um ∂F_t zu eliminiren, so findet sich sogleich

$$3)\qquad \partial y_{(x)} = \varphi_y\cdot\partial y_{(a)}.$$

Weil aber für jede beliebige Funktion U_y allemal

$$4)\quad \partial U_{(x)} = \partial U_y\cdot\partial y_{(x)} \qquad \text{und} \qquad 5)\quad \partial U_{(a)} = \partial U_y\cdot\partial y_{(a)}$$

ist, so findet dieselbe Gleichung (3.) auch noch statt, wenn an die Stelle der Ableitungen von y (nach x und nach a) die Ableitungen einer beliebigen Funktion U_y von y gesetzt werden, so daß man hat

$$6)\qquad \partial U_{(x)} = \varphi_y\cdot\partial U_{(a)}$$

und daher namentlich auch

$$7)\qquad \partial\psi_{(x)} = \varphi_y\cdot\partial\psi_{(a)},$$

---

*) Wir schreiben $\partial\psi_{(x)}$, $\partial^2\psi_{(x)}$, rc. rc. und schließen x in Klammern ein, um auszudrücken, daß die Differential-Koefficienten nach allem x genommen werden sollen, sowohl nach dem, welches in $x\cdot\varphi_y$ explicirt erscheint, als auch nach dem, welches in y noch implicit enthalten. Aehnliche Schreibweise muß dann auch in Bezug auf die Differential-Koefficienten nach a gebraucht werden.

wodurch die erste unsrer Ableitungen von ψ nach x, in eine Ableitung nach a ausgedrückt ist.

Um nun aus der Gleichung 7. durch weiteres Differenziiren nach x, nach und nach die Ableitungen $\partial^2\psi_{(x)}$, $\partial^3\psi_{(x)}$, ꝛc. ꝛc. bequem in Ableitungen nach a ausgedrückt zu erhalten, bemerke man, daß, wenn auch π_y eine ganz beliebige Funktion von y ist, man doch allemal hat

8) $$\partial(\pi_y\cdot\partial\psi_{(a)})_{(x)} = \partial(\pi_y\cdot\partial\psi_{(x)})_{(a)}\ ^{*)}.$$

Differenziirt man nun die 7. nach allem x, und wendet man rechts die Formel 8. an, so erhält man sogleich

9) $$\partial^2\psi_{(x)} = \partial(\varphi_y\cdot\partial\psi_{(x)})_{(a)} = \partial(\varphi_y{}^2\cdot\partial\psi_{(a)})_{(a)},$$

sobald hier statt $\partial\psi_{(x)}$ wieder sein Werth (aus 7.) gesetzt wird. Differenziirt man diese Gleichung 9. auf's Neue nach allem, x,

---

*) Denkt man sich nämlich eine Funktion U_y bestimmt durch die Gleichung

$$\partial U_y = \pi_y\cdot\partial\psi_y,$$

so ist die Gleichung 8. keine andere als diese

$$\partial(\partial U_{(a)})_{(x)} = \partial(\partial U_{(x)})_{(a)},$$

weil $\partial U_{(a)} = \partial U_y\cdot\partial y_{(a)} = \pi_y\cdot\partial\psi_y\cdot\partial y_{(a)} = \pi_y\cdot\partial\psi_{(a)}$

und $\partial U_{(x)} = \partial U_y\cdot\partial y_{(x)} = \pi_y\cdot\partial\psi_y\cdot\partial y_{(x)} = \pi_y\cdot\partial\psi_{(x)}$

ist. Die Gleichung 8. ist also richtig.

Die Richtigkeit der Gleichung 8. kann auch noch so erwiesen werden. Es ist, wenn man gewöhnlicherweise das Produkt differenziirt

$$\partial(\pi\ \cdot\partial\psi_{(x)})_{(a)} = \pi_y\cdot\partial^{1,1}\psi_{(x,a)} + \partial\pi_{(a)}\cdot\partial\psi_{(x)};$$

aber auch (nach 7.)

$$\partial\pi_{(a)}\cdot\partial\psi_{(x)} = \varphi_y\cdot\partial\pi_{(a)}\cdot\partial\psi_{(a)} = \partial\pi_{(x)}\cdot\partial\psi_{(a)}\ \text{(nach 6.)}.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorige Gleichung und bedenkt man zuletzt, daß nach der gewöhnlichen Differenziirung eines Produkts auch

$$\partial(\pi_y\cdot\partial\psi_{(a)})_{(x)} = \pi_y\cdot\partial^{1,1}\psi_{(a,x)} + \partial\pi_{(x)}\cdot\partial\psi_{(a)}$$

ist, so ist die Identität der beiden Ausdrücke (in 8.) abermals und sogleich außer Zweifel gestellt.

und wendet man rechts wiederum die Formel 8. an, indem man $\varphi_y{}^2$ statt π_y setzt, so hat man sogleich

10) $\partial^2\psi_{(x)} = \partial^2(\varphi_y{}^2 . \partial\psi_{(x)})_{(a)} = \partial^2(\varphi_y{}^3 . \partial\psi_{(a)})_{(a)}$,

in so ferne $\varphi_y . \partial\psi_{(a)}$ statt $\partial\psi_{(x)}$ gesetzt werden kann (nach 7.).

Und hat man etwa schon gefunden

11) $\partial^{r-1}\psi_{(x)} = \partial^{r-2}(\varphi_y{}^{r-1} . \partial\psi_{(a)})_{(a)}$,

so differenziire man diese Gleichung nochmals nach allem x, wende aber rechts die Formel 8. an, indem man daselbst $\varphi_y{}^{r-1}$ statt π_y schreibt, und man wird sogleich haben

12) $\partial^r\psi_{(x)} = \partial^{r-1}(\varphi_y{}^{r-1} . \partial\psi_{(x)})_{(a)} = \partial^{r-1}(\varphi_y{}^r . \partial\psi_{(a)})_{(a)}$,

in so ferne statt $\partial\psi_{(x)}$ allemal sogleich sein Werth $\varphi_y . \partial\psi_{(a)}$ (aus 7.) substituirt werden kann.

Ist also das Gesetz

13) $\partial^n\psi_{(x)} = \partial^{n-1}(\varphi_y{}^n . \partial\psi_{(a)})_{(a)}$

richtig für $n = r-1$, so ist solches auch richtig für $n = r$, und da solches zugleich richtig ist für $n = 1, 2, 3$, so folgt, daß es für jede ganze Zahl richtig ist, die statt n gesetzt werden mag. — Dasselbe Gesetz 13.) gilt endlich auch offenbar für $n = 0$, sobald man unter $\partial^{-1}(\partial\psi_{(a)})_{(a)}$ zunächst $\int(\partial\psi_{(a)}) . da$ d. h. ψ selbst versteht. — Setzt man nun, um die Koeffizienten der Maclaurin'schen Reihe zu erhalten, überall Null statt x, so geht dadurch y (vermöge der Gleichung 1.) in F_a, und ψ_y oder ψ in diejenige Funktion von a über, welche man erhält, wenn man in ψ_y, jetzt bloß F_a statt y setzt und welche wir jetzt unter $\psi_{(a)}$ verstehen wollen. — Der Maclaurin'sche Lehrsatz liefert daher jedesmal

I. $\psi_y = S\left[\partial^{b-1}\left(\varphi_y{}^b . \partial\psi_{(a)}\right)_{(a)} . \frac{x^b}{b!}\right]$,

wenn man nur (für $b = 0$) unter $\partial^{-1}(\partial\psi_{(a)})_{(a)}$ die Funktion $\psi_{(a)}$ (d. h. ψ_y, wenn F_a statt y gesetzt wird) versteht, und zur Rechten unter y bloß F_a verstanden wird.

Nimmt man statt der Gleichung (⊙), wodurch y in x gegeben ist, bloß die einfachere

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad y = a + x\cdot\varphi_y$$

(so daß $F_t = t$ und $\partial F_t = 1$ wird), so wird $F_a = a$, $\partial F_a = 1$, und (aus I.)

$$\text{II.} \qquad \psi_y = S\left[\partial^{b-1}\left(\varphi_a{}^b\cdot\partial\psi_a\right)_{(a)}\cdot\frac{x^b}{b!}\right]$$

wo rechts φ_a und $\partial\psi_a$ nichts anders sind, als was bezüglich aus φ_y und $\partial\psi_y$ wird, wenn man bloß a statt y schreibt.

Setzt man hier 1 statt x, so erhält man

$$\text{III.} \qquad \psi_y = S\left[\frac{1}{b!}\cdot\partial^{b-1}\left(\varphi_a{}^b\cdot\partial\psi_a\right)_{(a)}\right],$$

wenn nur y in a gegeben ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{d}\cdots \qquad y = a + \varphi_y$$

und rechts φ_a und $\partial\psi_a$ nichts anders vorstellen, als was bezüglich aus φ_y und $\partial\psi_y$ wird, wenn man bloß a statt y schreibt. — Diese Reihe III. kann aber nur dann in Anwendung kommen, wenn sie als numerisch und convergent vorausgesetzt wird, weil sie nicht mehr nach einem unbestimmten x fortschreitet.

Anmerk. 1. Dieser letztere Satz ist von Lagrange durch Induktion gefunden worden, indem er die Wurzelwerthe der allgemeinen algebraischen Gleichungen entwickeln wollte. — Da die von Laplace gegebene Reihe I. nur eine Erweiterung dieser letztern ist, so thun wir nicht ganz Unrecht, wenn wir diese Sätze I.—III. künftighin unter einem und demselben Namen, nämlich unter dem des Lagrange in Erinnerung bringen.

Zeigen wir hier noch einige Anwendungen dieser Entwickelung und zwar zunächst die Anwendung derselben auf die Entwickelung der n^{ten} Potenz von y aus der Gleichung

$$1) \qquad \alpha - \beta\cdot y + \gamma\cdot y^m = 0.$$

Wir geben nämlich zunächst dieser Gleichung die Form

$$2) \qquad y = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}\cdot y^m.$$

Vergleicht man nun diese mit der obigen ($\mathfrak{d}$), nämlich mit

$$y = a + \varphi_y,$$

so hat man hier

$$a = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{und} \quad \varphi_y = \frac{\gamma}{\beta} \cdot y^m,$$

während $\psi_y = y^n$

ist. — Die Gleichung III. giebt nun

$$3) \qquad y^n = S\left[\frac{1}{b!} \cdot \frac{\gamma^b}{\beta^b} \cdot n \cdot \partial^{b-1}\left(a^{n+mb-1}\right)_a\right],$$

wo $a = \frac{\alpha}{\beta}$ ist; oder, wenn man wirklich differenziirt,

$$4) \qquad y^n = n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot S\left[(n+mb-1)^{b-1|-1} \cdot \left(\frac{\alpha^{m-1}\gamma}{\beta^m}\right)^b\right],$$

wo man nicht übersehen wird, daß (für $b = 0$) $(n-1)^{-1|-1} = \frac{1}{n}$ ist (nach §. 344. d. II. Th. d. S., oder nach d. Einleitg. §. 1. Nr. 2.).

Für $n = 1$ sieht man in 4. den Werth, welchen y aus der Gleichung

$$\alpha - \beta \cdot y + \gamma \cdot y^m = 0$$

annimmt, in eine nach Potenzen von $\frac{\alpha^{m-1} \cdot \gamma}{\beta^m}$ oder von $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m-1} \cdot \frac{\gamma}{\beta}$ fortlaufende Reihe entwickelt. — Diese Reihe ist übrigens wiederum nur eindeutig, und es bleibt daher den speziellen Untersuchungen überlassen, welchen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung sie in jedem besonderen Falle vorstellt *).

---

*) Lagrange hat in seiner Résolution des équations numériques gezeigt, daß die in 3.) gefundene Reihe allemal die n^{te} Potenz des kleinsten der Wurzelwerthe giebt (vorausgesetzt, daß die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzelwerthe hat). Nimmt man aber von der Reihe in 3.) nur die Glieder, welche mit negativen Potenzen von a versehen sind, so hat man die Summe der $(-n)^{ten}$ Potenzen aller Wurzelwerthe der gegebenen höheren Gleichung.

Für $m = 2$ erhält man dieselbe Reihe auch direkt, wenn man die Gleichung

$$\alpha - \beta \cdot y + \gamma \cdot y^2 = 0$$

nach y auflöst, und dann die vorkommende Quadratwurzel $\sqrt{1-\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}$ oder $\left(1-\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.

Zu neuer Anwendung dieses Lagrange'schen Satzes III. dient das Problem der Umkehrung der Reihe

$$z = \alpha \cdot y + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot y^3 + \delta \cdot y^4 + \cdots,$$

wenn man dieser Gleichung die Form

$$\frac{z}{\alpha} - y - \frac{y^2}{\alpha} \cdot \left(\beta + \gamma \cdot y + \delta \cdot y^2 + \cdots\right) = 0$$

giebt, so daß man

$$a = \frac{z}{\alpha} \quad \text{und} \quad \varphi_y = -\frac{y^2}{\alpha} \cdot \left(\beta + \gamma \cdot y + \delta \cdot y^2 + \cdots\right)$$

hat. Man erhält dann sogleich

$$y^n = S\left[\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{(-1)^b}{b!} \cdot \partial^{b-1}\left(a^{2b+n-1} \cdot (\beta + \gamma \cdot a + \delta \cdot a^2 + \cdots)^b\right)_a\right].$$

Für $n = 1$ giebt diese Formel y selbst; und wenn für $b = 0$ die Integration, für $b = 2, 3, 4,$ ꝛc. ꝛc. aber die Differenziationen ausgeführt werden, so erhält man genau das Resultat, welches im II. Th. d. S. §. 581. als Lösung derselben Aufgabe bereits gefunden worden ist. — Die für y gefundene Reihe selbst aber erscheint hier nicht unmittelbar nach Potenzen von z geordnet, wie dies dort der Fall gewesen ist.

Nimmt man als dritten Fall der Anwendung die Gleichung

$$y = a + \alpha \cdot \mathit{Sin}\, y$$

und soll nun $\log y$, entwickelt werden, so liefert unser Satz, weil jetzt $x = \alpha$, $\varphi_y = \mathit{Sin}\, y$ und $\psi_y = \log y$ ist, sogleich

$$\log y = S\left[\partial^{b-1}\left((\mathit{Sin}\, a)^b \cdot \frac{1}{a}\right)_{(a)} \cdot \frac{\alpha^b}{b!}\right],$$

wo für $b = 0$ das erste Glied $= \partial^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)_a = \int \frac{1}{a} \cdot da = \log a$ genommen werden muß.

Anmerkg. 2. Laplace hat die Untersuchung des §. 26. noch mehr erweitert, und namentlich folgende Aufgabe gelöst.

Es sind y und z Funktionen von t und x, gegeben durch die Gleichungen

$$1)\quad y = F_{a+t.\phi_{y,z}} \qquad \text{und} \qquad 2)\quad z = F'_{b+x.\phi'_{y,z}}$$

wo F, F', φ und φ' beliebig gegebene Funktionen vorstellen. Man soll eine beliebige Funktion ψ von y und z in eine Doppelreihe verwandeln, welche nach Potenzen von t und von x fortläuft. — Man findet diese Erweiterung auch in Lacroix Traité de calcul diff. et intégr. — Wir übergehen sie hier, wie auch Arbeiten von Paoli und Anderen, welche noch allgemeinere Sätze geben, in denen wieder der des Lagrange als besondere Fälle stecken; da dergleichen Erweiterungen in der Regel nahe liegen und dabei meist nicht von besonderem Interesse sind.

§. 7.

Für den besonderen Fall, daß der Werth der Funktion f_x ein reeller ist, und die Koefficienten der Maclaurin'schen Reihe bis zu irgend einem bestimmten (n^{ten}) Gliede hin auch reell sind, hat Lagrange gezeigt, innerhalb welcher Grenzen dann das Ergänzungsglied liegen muß, wenn man die Maclaurin'sche Reihe bei einem solchen beliebigen n^{ten} Gliede will abbrechen lassen, mittelst des dann noch hinzutretenden Ergänzungsgliedes aber den Werth von f_x haben will. Er hat gefunden (S. V. Th. d. S. §§. 239. 240):

$$\text{I.}\qquad f_x = S\left[\partial^a f_0 \cdot \frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + \partial^n f_{\theta x} \cdot \frac{x^n}{n!} \;{}^{*)}$$

*) Da nach der ein für allemal gemachten Annahme, die kleinen deutschen Buchstaben stets 0 und alle positiven ganzen Zahlen bedeuten, so drückt die Gleichung $a+b = n-1$ nichts anders aus, als daß man dem

und II. $f_x = S\left[\partial^a f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^a}{a!}\right]_{a+b=n-1} + \partial^n f_{\alpha+\theta(x-\alpha)} \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!}$,

wo θ zwischen 0 und 1 liegt, aber nicht näher bestimmt werden kann. (Vgl. Einleitg. §. 20.).

Die beiden Grenzen zwischen denen das Ergänzungs-Glied liegt, gehen nämlich aus dem letzten Gliede (in I. und II.) dadurch hervor, daß man statt θ nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe von 0 bis 1 setzt, und dann den größten und kleinsten der dadurch aus $\partial^n f_{\theta x}$ oder $\partial^n f_{\alpha+\theta(x-\alpha)}$ hervorgehenden Werthe nimmt, welche natürlich wieder von dem jedesmaligen bestimmten Werthe von x abhängen.

Wir citiren diese Formeln unter dem Namen der Lagrange-Maclaurin'schen.

§. 8.

Mittelst dieses Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatzes läßt sich das Wesen gewisser unendlicher numerischer Reihen erklären, welche an sich divergent, daher zur Bestimmung des Werthes einer Funktion f_x durchaus nicht mehr fähig sind, welche aber nichtsdestoweniger, wenn man 2, 3, 4, 5, ⋯ ν erste Glieder derselben nimmt, dem Werthe von f_x immer näher rücken, während die Summe von noch mehr Gliedern (von einem gewissen bestimmten ν^{ten} Gliede ab) wiederum von dem wahren Werthe von f_x immer mehr und meist unendlich weit abweicht, sobald man unendlich viele Glieder der Reihe nimmt.

Legendre nannte solche Reihen halb-convergente. — Es läßt sich aber jede solche Reihe als Entwickelungs-Reihe einer entsprechenden Funktion f_x nachweisen, nach ganzen Potenzen von x, und für einen speciellen Werth von x genommen. Nimmt man nun den Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatz (§. 7. I. oder II.) und zwar für n = 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc., so zeigen sich die

---

a nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ bis n−1 geben muß, daß man aber a nie größer als n−1 nehmen kann, weil sonst b (der Voraussetzung entgegen) negativ werden würde.

beiden Grenzen, zwischen denen das Ergänzungs-Glied liegt, bis $n = \nu$ stets enger werdend, von $n = \nu + 1$ aber ab und für jeden noch größern Werth von n, immer weiter und zuletzt unendlich weit aus einander gehend.

Daß man mit diesen halb-convergenten unendlichen Reihen, eben weil sie in der That divergente sind, nicht weiter rechnen dürfe, versteht sich von selbst.

§. 9.

Ein weiteres Mittel der Entwickelung einer Funktion f_x in eine unendliche Reihe, so daß man

$$(\mathfrak{C}) \qquad f_x = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \text{ in inf. } \cdots$$

erhält, besteht darin, daß man die Koefficienten C_1, C_2, C_3, rc. rc. unbestimmt wie sie sind, bloß bezeichnet, nachher aber aus der Gleichung ($\mathfrak{C}$) alle indirekten Operationen wegschafft, und zuletzt dafür sorgt, daß links und rechts des = Zeichens alles, für jeden Werth von x, vollständig mit einander übereinstimmt (vgl. §. 2.). Dadurch bekommt man eine unendliche Menge von Gleichungen, die das rekurrente Gesetz enthalten, nach welchem die bisher unbestimmten Koefficienten aus einander hervorgehen.

Es ist dabei klar, daß diese „Methode der unbestimmten Koefficienten" nicht eher in Anwendung kommen darf, als bis man vorher nachgewiesen hat, daß eine Reihe von der angenommenen Form wirklich geeignet ist, die zu entwickelnde Funktion f_x in allen Fällen darzustellen.

Auch giebt diese Methode nicht vollkommene (vollständige) Gleichungen, wenn man nicht bei der direkten Bestimmung eines dieser Koefficienten, in welchen alle die übrigen ausgedrückt sind, für diese Vollständigkeit Sorge trägt. (Vgl. §. 663. d. II. Th. d. S. 2te Aufl. pag. 391. letzte Zeile).

Diese Methode der unbestimmten Koeffizienten haben wir z. B. im II. Th. d. S. §. 578. angewandt, um eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe für

$$\sqrt[m]{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots}$$

zu erhalten. Wir fanden durch diese Methode das rekurrente Gesetz der gesuchten Reihe. Wollte man aber das independente Gesetz derselben Reihe haben, so müßte man den polynomischen Lehrsatz zu Hilfe nehmen (§. 4. Nr. 7.) und daselbst $\frac{1}{m}$ statt z schreiben.

§. 10.

Um aber das Geschäft des §. 9. zu erleichtern in zusammengesetzteren Fällen (z. B. in dem so eben erwähnten Falle, oder allgemeiner, wenn

$$X^m, \quad \frac{X^m}{X'^n}, \quad \mathit{log}\, X, \quad \mathit{Sin}\, X, \quad \frac{1}{\mathit{Sin}}\cdot X, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

in unendliche Reihen entwickelt werden sollen, wo X und X′ die Reihen

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots, \qquad b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots,$$

oder Funktionen von x vorstellen, die selbst noch in ähnliche Reihen verwandelt werden können und sollen) bildet man, statt direkt Reihen zu finden, welche an die Stelle des y gesetzt, den Gleichungen

1) $X^m = y$ oder 2) $\frac{X^m}{X'^n} = y$

oder 3) $\mathit{log}\, X = y$ oder 4) $\mathit{Sin}\, X = y$

oder 5) $\frac{1}{\mathit{Sin}}\cdot X = y$, *) oder ꝛc. ꝛc.

genügen, — aus jeder dieser Gleichungen in jedem einzelnen Falle zuvor eine Differenzial-Gleichung, in welcher die zusammengesetztere Funktion, also X^m, oder $\frac{X^m}{X'^n}$, oder $\mathit{log}\, X$, oder $\mathit{Sin}\, X$, oder $\frac{1}{\mathit{Sin}}\cdot X$, ꝛc. ꝛc. eliminirt worden ist. —

*) Man übersehe hier nicht, daß diese Aufgaben alle durch die (im 11ten Kap. d. V. Th. d. S.) vorgetragene Methode (Variationsrechnung) unmittelbar gelöst sind.

Findet man dann eine Reihe, welche statt y gesetzt, der Differenzialgleichung genügt, und hat sie so viel Konstanten (Koeffizienten) unbestimmt gelassen, daß sie als das allgemeine Integral dieser Differenzialgleichung angesehen werden kann, so ist in ihr die gesuchte Reihe offenbar enthalten, so daß nur noch die unbestimmt gebliebenen Konstanten den übrigen Bedingungen der Aufgabe gemäß, eine nähere Bestimmung zu erleiden haben, welches letztere allemal für spezielle Werthe von x geschehen kann und muß.

Ist also z. B. X^m in eine Reihe nach x zu entwickeln, während

$$1)\qquad X = S[C_a \cdot x^a]$$

ist, so schreibe man

$$2)\qquad X^m = y,$$

differenziire diese Gleichung, so daß man erhält:

$$3)\qquad m \cdot X^{m-1} \cdot \partial X_x = \partial y_x,$$

und eliminire nun aus beiden Gleichungen die Potenz X^m; man erhält dann, weil

$$X^{m-1} = \frac{X^m}{X}$$

ist,

$$(\odot)\cdots\qquad my \cdot \partial X_x - X \cdot \partial y_x = 0.$$

Dieser Differenzialgleichung soll nun durch die Reihe

$$4)\qquad y = S[R_a \cdot x^a]$$

genügt werden. — Man zieht aber aus den Gleichungen 1. und 4., indem selbige differenziirt werden,

$$5)\qquad \partial X_x = S[(a+1) \cdot C_{a+1} \cdot x^a]\ *)$$

*) Es ist nach dem Differenziiren a+1 statt a gesetzt worden, weil a+1 (der angenommenen Bezeichnung zufolge) alle ganzen Zahlen aber nicht Null vorstellt, und das allererste Glied der durch das Differenziiren erhaltenen Reihe, d. h. das Glied, welches erhalten wird, wenn man das alte a, = 0 nimmt, doch Null wird, also fehlen kann.

und 6) $\partial y_x = S[(a+1)\cdot R_{a+1}\cdot x^a]$.

Substituirt man daher diese Reihen zur Rechten (aus 1., 4., 5. u. 6.) statt X, y, ∂X_x und ∂y_x in die Gleichung (☉), so erhält man

$$7)\quad S\left[\left((a+1)\cdot m\cdot R_b\cdot C_{a+1} - (a+1)\cdot R_{a+1}\cdot C_b\right)\cdot x^n\right]_{a+b=n} = 0$$

und daraus für jeden bestimmten Werth n von n das rekurrente Gesetz

$$(☾)\cdots\quad S\left[(a+1)\cdot m\cdot R_b\cdot C_{a+1} - (a+1)\cdot R_{a+1}\cdot C_b\right]_{a+b=n} = 0,$$

aus welchen der Koefficient R_n in alle vorhergehenden Koeffizienten ausgedrückt wird. Der Koeffizient R_0 bleibt unbestimmt, ist die willkührliche Konstante, welche durch diese Integration der Gleichung (☉) eingeht und muß nun, etwa für $x = 0$, aus der Gleichung

$$X^m = S[R_a\cdot x^a]$$

direkt gefunden werden, wo sich dann $R_0 = C_0{}^m$ ergiebt.

Setzt man z. B. $n = 3$, so hat man

a,	b
0,	3
1,	2
2,	1
3,	0

und die Gleichung (☾) giebt dasmal

$$m\cdot(4R_0\cdot C_4+3R_1\cdot C_3+2R_2\cdot C_2+R_3\cdot C_1)$$
$$-(R_1\cdot C_3+2R_2\cdot C_2+3R_3\cdot C_1+4R_4\cdot C_0) = 0,$$

woraus sich R_4 in R_3, R_2, R_1 und R_0 ausgedrückt findet *).

Setzt man also statt n nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. f. so erhält man R_1 in R_0, dann R_2 in R_1 und R_0, dann R_3 in R_2 und R_1 und R_0, u. s. w. f. ausgedrückt.

*) Für dieselbe Reihe $S[R_a\cdot x^a]$, wie sie hier (in 1.) gesucht wird, enthält aber die (Formel 7. des §. 4.), nämlich der polynomische Lehrsatz, das independente Gesetz, während die obige Gleichung (☾) ihr rekurrentes Gesetz ausspricht.

Anmerkg. 1. Dieselbe Arbeit macht sich im Praktischen auch so: Man setzt

$$X^m = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + R_3 x^3 + \cdots$$

und nimmt links und rechts das logarithmische Differenzial (d. h. zuerst die Logarithmen, dann ihre Differenzial-Koeffizienten), so erhält man

$$\frac{m \cdot \partial X_x}{X} = \frac{R_1 + 2R_2 \cdot x + 3R_3 \cdot x^2 + \cdots}{R_0 + R_1 \cdot x + R_2 \cdot x^2 + R_3 \cdot x^3 + \cdots}.$$

Setzt man nun hier herein $C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \cdots$ statt X, also $C_1 + 2C_2 \cdot x + 3C_3 \cdot x^2 + \cdots$ statt ∂X_x, so darf man nur noch die Brüche wegschaffen, um dieselben Gleichungen (C) zu erhalten.

Man erkennt leicht die Möglichkeit des analogen Verfahrens in allen ähnlichen Beispielen.

Anmerkg. 2. Das Verfahren der Anmerkg. 1. findet man auch zuweilen so ausgeführt, daß man keine Differenzial-Rechnung dazu verwandt zu haben scheint. Man setzt zu dem Ende den gegebenen und zu entwickelnden Ausdruck z. B. X^m, der gesuchten Reihe mit unbestimmten Koeffizienten gleich, — setzt dann in dieser Gleichung $x+h$ statt x, um zuletzt die Koeffizienten von h mit einander zu vergleichen. — Weil aber der Koeffizient von h in f_{x+h} nichts weiter als ∂f_x ist, so kann man auf diesem Wege leicht wieder genau die vorliegenden Rechnungen reproduciren, namentlich da man, noch bevor $x+h$ statt x gesetzt wird, auch zuvor noch von der hingeschriebenen Gleichung links und rechts die Logarithmen nehmen kann.

§. 11.

Uebergehen wir das 2te Beispiel des §. 10., um sogleich $log\,X$ in eine Reihe zu verwandeln, während X wiederum die Reihe $C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \cdots$ vorstellt, so hat man

$$log\,X = y,$$

mithin, wenn differenzirt wird,

$$(\odot)\cdots \qquad \frac{\partial X}{X} = \partial y, \quad \text{oder} \quad \partial X - X\cdot\partial y = 0,$$

wo alle Differenzial-Koeffizienten nach x genommen sind.

Wird also, während

$$X = S[C_a \cdot x^a]$$

ist, noch

$$y = S[R_a \cdot x^a]$$

gesetzt, so wird

$$\partial X = S[(a+1)\cdot C_{a+1}\cdot x^a]$$

und $$\partial y = S[(a+1)\cdot R_{a+1}\cdot x^a];$$

und die Differenzialgleichung ($\odot$) geht jetzt über in

$$S\Big[\big((a+1)\cdot C_{a+1} - \underset{b+c\,=\,a}{(c+1)\cdot C_b \cdot R_{c+1}}\big)\cdot x^a\Big] = 0.\,^{*)}$$

Daher ist das rekurrente Gesetz der gesuchten Reihe, wenn man (n oder) n—1 statt a setzt, und dabei nicht übersieht, daß dann, wegen $b+c = n-1$ auch $b = n-1-c$ genommen werden kann,

$$(☾)\cdots \qquad S\Big[n\cdot C_n - \underset{b+c\,=\,n-1}{(c+1)C_{n-1-c}\cdot R_{c+1}}\Big] = 0,$$

durch welche Gleichung der Koeffizient R_n in alle ihm vorhergehenden Koeffizienten ausgedrückt sich sieht **).

Diese letztere Aufgabe enthält in ihrer Auflösung natürlich auch das rekurrente Gesetz für die Entwickelung von *log*(1+x),

*) Als wir die Reihe für X mit der für ∂y multiplicirten, ist in der erstern b statt a gesetzt worden, in der andern aber c statt a; man hat dadurch bewirkt, daß das b[te] Glied der einen Reihe mit dem c[ten] Gliede der andern Reihe multiplicirt worden ist, d. h. weil b und c von einander unabhängig sind, jedes Glied der einen Reihe mit jedem Gliede der andern, gerade wie das seyn muß. Hätte man dagegen das a[te] Glied der einen Reihe mit dem a[ten] Gliede der andern multiplicirt, so hätte man nicht jedes Glied mit jedem Gliede multiplicirt gehabt.

**) Denkt man sich hier die Reihe für y gegeben und die für X gesucht, so sieht man in der Gleichung (☾) zugleich das rekurrente Gesetz ausgesprochen für die Koeffizienten der Reihe X, welche aus der Entwickelung von e^y hervorgeht, während y selbst eine gegebene Reihe

$$R_0 + R_1\cdot x + R_2\cdot x^2 + \cdots \qquad \text{ist.}$$

wenn man $C_0 = C_1 = 1$, dagegen $C_2 = C_3 = C_4 = \text{etc.} = 0$ setzt.

§. 12.

In manchen Fällen ist es besser zu Differenzial-Gleichungen einer höherern Ordnung seine Zuflucht zu nehmen.

I. In dem 4ten Beispiel des §. 10., wo $Sin X$ in eine Reihe zu verwandeln ist, während wiederum

$$1)\qquad X = S[C_a \cdot x^a]$$

gegeben ist, setze man

$$2)\qquad Sin X = y,$$

und differenziire diese Gleichung nach allem x, so daß man erhält

$$3)\qquad Cos X \cdot \partial X = \partial y.$$

Differenziirt man nun diese letztere Gleichung noch einmal nach allem x, so ergiebt sich

$$4)\qquad Cos X \cdot \partial^2 X - Sin X \cdot \partial X^2 = \partial^2 y;$$

und eliminirt man nun aus allen 3 Gleichungen (2—4.) sowohl $Sin X$ als auch $Cos X$, so findet sich

$$(\odot)\cdots\qquad \partial y \cdot \partial^2 X - y \cdot \partial X^3 - \partial X \cdot \partial^2 y = 0,$$

wo alle Differenzial-Koeffizienten nach x genommen sind.

Dieser Differenzialgleichung ($\odot$) der 2ten Ordnung muß man nun durch die Koeffizienten der für y gesuchten Reihe

$$y = S[R_a \cdot x^a]$$

zu genügen trachten, um das rekurrente Gesetz dieser Reihe zu erhalten.

II. Ist aber $\frac{1}{Sin} \cdot X$ in eine Reihe zu verwandeln, so setze man

$$1)\qquad \frac{1}{Sin} \cdot X = y$$

hat dann, wenn differenziirt wird,

$$2)\qquad \frac{\partial X}{\sqrt{1-X^2}} = \partial y \quad \text{oder} \quad (1-X^2)^{-\frac{1}{2}}.\partial X = \partial y.$$

Wird nun diese Gleichung noch einmal differenzirt, so giebt dies

$$3)\qquad (1-X^2)^{-\frac{1}{2}}.\partial^2 X-(1-X^2)^{-\frac{3}{2}}.\partial X^2 = \partial^2 y;$$

und eliminirt man noch aus den Gleichungen 2. u. 3. die Wurzel $\sqrt{1-X^2}$ oder $(1-X^2)^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man die Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

$$(\odot)\ldots \qquad \partial^2 X.\partial y-\partial y^3-\partial X.\partial^2 y = 0,$$

welcher nun durch die Koeffizienten der Reihe

$$y = S[R_a.x^a]$$

genügt werden muß und in welcher alle Differenzial-Koeffizienten, nach x genommen sind.

Ist z. B. $X = x$, also $\partial X = 1$, $\partial^2 X = 0$, so geht die Gleichung $(\odot)$ über in

$$(☾)\ldots \qquad \partial y^3+\partial^2 y = 0.$$

Aus
$$y = S[R_a.x^a]$$

folgt nun
$$\partial y = S[(a+1).R_{a+1}.x^a]$$

und
$$\partial^2 y = S[(a+2)(a+1).R_{a+2}.x^a]$$

Diese Werthe in die Gleichung (☾) substituirt, geben das rekurrente Gesetz der für y gesuchten Reihe, und zwar R_{a+2} in die Koeffizienten der 3ten Potenz der Reihe für ∂y, ausgedrückt.

§. 13.

Man kann auch aus der zu entwickelnden Funktion eine Parzialgleichung bilden, und dann für diese Parzialgleichung eine Reihe als allgemeines Integral mit einer willkührlichen Funktion aufsuchen. — Zuletzt muß dann die eingehende willkührliche Funktion aus den übrigen Bedingungen der Entwickelung bestimmt werden.

Nehmen wir als Beispiel die Aufgabe des §. 6., deren Lösung der von Laplace erweiterte Lagrange'sche (Entwicke-

lungs-) Lehrsatz ist, und suchen wir nach der gegenwärtigen Methode das rekurrente Gesetz derselben Reihe auf.

Es soll nämlich ψ_y in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden, während y selbst gegeben ist durch die Gleichung

$$1)\qquad y = F_{a+x\cdot\varphi_y}.$$

Man findet hier sogleich, genau wie im §. 6. selbst, die Parzialgleichung

$$(\odot)\cdots\qquad \partial\psi_{(x)} = \varphi_y\cdot\partial\psi_{(a)},$$

von welcher nun ein allgemeines Integral (für ψ) in Form einer nach x fortlaufenden Reihe gesucht wird.

Setzt man daher

$$2)\qquad \psi_y = S\left[\psi_{k,a}\cdot\frac{x^a}{a!}\right],$$

wo $\psi_{k,0}$, $\psi_{k,1}$, $\psi_{k,2}$, $\psi_{k,3}$, ... $\psi_{k,a}$, ... die unbestimmten gesuchten Koeffizienten vorstellen und im Allgemeinen Funktionen von a seyn werden; so hat man auch, weil ψ_y jede beliebige Funktion von y seyn kann,

$$3)\qquad \varphi_y = S\left[\varphi_{k,a}\cdot\frac{x^a}{a!}\right]$$

wo $\varphi_{k,a}$ dieselben Koeffizienten vorstellt, welche aus $\psi_{k,a}$ hervorgehen, wenn φ statt ψ gesetzt wird. Differenziirt man noch überdies die Gleichung 2. nach x und nach a, so erhält man noch

$$4)\qquad \partial\psi_{(x)} = S\left[\psi_{k,a+1}\cdot\frac{x^a}{a!}\right]$$

und $$5)\qquad \partial\psi_{(a)} = S\left[\partial(\psi_{k,a})_a\cdot\frac{x^a}{a!}\right].$$

Werden daher jetzt diese Werthe zur Rechten (aus 3. 4. u. 5.) in die Parzialgleichung $\odot$ substituirt, so erhält man

$$6)\qquad S\left[\psi_{k,a+1}\cdot\frac{x^a}{a!}\right] = S\left[\varphi_{k,b}\cdot\partial(\psi_{k,c})_a\cdot\frac{x^a}{b!\,c!}\right]_{b+c=a};$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich nun, wenn man die mit x^n affizirten Glieder mit einander vergleicht

$$(\mathfrak{C})\ldots\qquad \psi_{k,n+1} = S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!}\cdot\varphi_{k,b}\cdot\partial(\psi_{k,c})_a\right]_{b+c=n},$$

wo man nicht übersehen mag, daß $\frac{(b+c)!}{b!\ c!}$, (während $b+c=n$) die Koeffizienten der Binomial-Potenz $(p+q)^n$ sind.

Setzt man hier statt n nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc., so giebt diese Gleichung ($\mathfrak{C}$)

7) $\psi_{k,1} = \varphi_{k,0}\cdot\partial(\psi_{k,0})_a$

8) $\psi_{k,2} = \varphi_{k,0}\cdot\partial(\psi_{k,1})_a + \varphi_{k,1}\cdot\partial(\psi_{k,0})_a$

9) $\psi_{k,3} = \varphi_{k,0}\cdot\partial(\psi_{k,2})_a + 2\cdot\varphi_{k,1}\cdot\partial(\psi_{k,1})_a + \varphi_{k,2}\cdot\partial(\psi_{k,0})_a$

10) $\psi_{k,4} = \varphi_{k,0}\cdot\partial(\psi_{k,3})_a + 3\cdot\varphi_{k,1}\cdot\partial(\psi_{k,2})_a + 3\cdot\varphi_{k,2}\cdot\partial(\psi_{k,1})_a + \varphi_{k,3}\cdot\partial(\psi_{k,0})_a$

u. s. w. f.

Durch diese Gleichungen sieht man also die Koeffizienten $\psi_{k,1}$, $\psi_{k,2}$, $\psi_{k,3}$, $\psi_{k,4}$, ꝛc. ꝛc. in einander ausgedrückt, und nur $\psi_{k,0}$ bleibt unbestimmt, ist die durch die Integration eingehende willkührliche Funktion (von a), und wird am bequemsten aus 2. bestimmt, indem man $x = 0$ nimmt.

Bezeichnet man nun durch ψ_a, φ_a das, was aus ψ_y, φ_y wird, wenn man F_a statt y setzt (oder das, was aus obigem $\psi_{(a)}$, $\varphi_{(a)}$ wird, wenn man in letzteren $x = 0$ setzt), so hat man

11) $\psi_{k,0} = \psi_a$

und daher auch

12) $\varphi_{k,0} = \varphi_a$.

Diese Werthe in 7. gesetzt, geben

13) $\psi_{k,1} = \varphi_a\cdot\partial\psi_a$,

also auch, wenn φ statt ψ gesetzt wird

14) $\varphi_{k,1} = \varphi_a\cdot\partial\varphi_a$.

Diese Werthe in die Gleichung 8. substituirt, geben dann

$$15) \qquad \psi_{k,2} = \varphi_a \cdot \partial(\varphi_a \cdot \partial\psi_a)_a + \varphi_a \cdot \partial\varphi_a \cdot \partial\psi_a,$$

also auch

$$16) \qquad \varphi_{k,2} = \varphi_a \cdot \partial(\varphi_a \cdot \partial\varphi_a)_a + \varphi_a \cdot \partial\varphi_a \cdot \partial\varphi_a;$$

u. s. w. f.

Man sieht wie die Gleichung (☾) in der That alle Koeffizienten $\psi_{k,1}$, $\psi_{k,2}$, $\psi_{k,3}$, $\psi_{k,4}$, 2c. nach und nach liefert; aber es hält schwer das einfache Gesetz zu erkennen, welches sie befolgen.

Giebt man aber der Parzialgleichung (⊙) eine etwas geänderte Form, so daß sie einfacher wird, so wird auch das rekurrente Gesetz sich einfacher gestalten. Zu dem Ende führe man eine Funktion u_y oder u ein, gegeben durch die Gleichung

$$16) \qquad \partial u_y = \varphi_y \cdot \partial\psi_y,$$

und man hat

$$17) \qquad \partial u_{(a)} = \partial u_y \cdot \partial y_{(a)} = \varphi_y \cdot \partial\psi_y \cdot \partial y_{(a)} = \varphi_y \cdot \partial\psi_{(a)};$$

und die Parzialgleichung (⊙) wird daher jetzt die nachstehende Gestalt annehmen:

$$(\odot_1) \cdots \qquad \partial\psi_{(x)} = \partial u_{(a)}.$$

Setzt man nun noch

$$18) \qquad u_y = S\left[u_{k,a} \cdot \frac{x^a}{a!}\right],$$

so gehen (wegen 2.) die Koeffizienten $u_{k,a}$ aus den Koeffizienten $\psi_{k,a}$ hervor, wenn in letzteren u statt ψ gesetzt wird, also daß man (aus 11.)

$$19) \qquad u_{k,0} = u_a,$$

hat, wenn man durch u_a (ohne Klammern) das bezeichnet, was aus u_y hervorgeht, wenn bloß F_a statt y gesetzt wird; ferner hat man (nach 17.) für $x = 0$,

$$20) \qquad \partial(u_{k,0})_a = \partial u_a = \varphi_a \cdot \partial\psi_a,$$

weil wir wiederum unter u_a, φ_a, ψ_a das verstanden haben,

was aus u_y, φ_y, ψ_y für $y = F_{a+x.\varphi_y}$ wird, wenn man 0 statt x setzt, d. h. das, was aus u_y, φ_y, ψ_y hervorgeht, wenn man bloß F_a statt y schreibt. — Differenziirt man aber die Gleichung 18. nach a, so erhält man

$$21)\qquad \partial(u_y)_{(a)} = S\left[\partial(u_{k,a})_a \cdot \frac{x^a}{a!}\right].$$

Die Parzialgleichung $\odot_1$ giebt daher nun, wenn man die Reihen (aus 4. u. 21.) in sie substituirt, und die Koeffizienten von x^n mit einander vergleicht,

$$22)\qquad \psi_{k,(n+1)} = \partial(u_{k,n})_a;$$

oder, wenn hier nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, rc. rc. statt n gesetzt wird,

$$23)\qquad \psi_{k,1} = \partial(u_{k,0})_a = \varphi_a \cdot \partial\psi_a \quad \text{(nach 20.)}$$

$$24)\qquad \psi_{k,2} = \partial(u_{k,1})_a = \partial(\varphi_a{}^2 \cdot \partial\psi_a),$$

in so ferne aus (23.), indem u statt ψ gesetzt wird,

$$u_{k,1} = \varphi_a \cdot \partial u_a = \varphi_a{}^2 \cdot \partial\psi_a \quad \text{(nach 20.) hervorgeht;}$$

$$25)\qquad \psi_{k,3} = \partial(u_{k,2})_a = \partial^2(\varphi_a{}^3 \cdot \partial\psi_a)_a,$$

weil (aus 24.), wenn u statt ψ gesetzt wird,

$$u_{k,2} = \partial(\varphi_a{}^2 \cdot \partial u_a)_a = \partial(\varphi_a{}^3 \cdot \partial\psi_a)_a \qquad \text{(nach 20.)}$$

sich ergiebt; ferner

$$26)\qquad \psi_{k,4} = \partial(u_{k,3})_a = \partial^3(\varphi_a{}^4 \cdot \partial\psi_a)_a,$$

in so ferne wiederum (aus 25.) hervorgeht

$$u_{k,3} = \partial^2(\varphi_a{}^3 \cdot \partial u_a) = \partial^2(\varphi_a{}^4 \cdot \partial\psi_a) \quad \text{(nach 20.)}$$

Allgemein: hat man gefunden

$$27)\qquad \psi_{k,n-1} = \partial^{n-2}(\varphi_a{}^{n-1} \cdot \partial\psi_a)_a$$

so giebt dies, wenn u statt ψ gesetzt wird,

$$28)\quad u_{k,n-1} = \partial^{n-2}(\varphi_a{}^{n-1} \cdot \partial u_a) = \partial^{n-2}(\varphi_a{}^n \cdot \partial\psi_a) \quad \text{(nach 20.)},$$

während die Gleichung (22.) dann wiederum

$$29)\qquad \psi_{k,n} = \partial(u_{k,n-1})_a = \partial^{n-1}(\varphi_a{}^n \cdot \partial\psi_a)$$

liefert, welches wiederum die Gleichung 27. ist, nur n statt n—1 gesetzt. — Findet also die Gleichung 29. für irgend einen Werth von n statt, so findet sie nothwendig allemal für den nächstfolgenden Werth von n statt. Und da sie (nach den N.N. 23—26.) für n = 1, 2, 3, 4 statt findet, so findet sie auch für jeden folgenden ganzen positiven Werth von n statt, so daß die Gleichung 29. das Gesetz der Koeffizienten der für ψ gesuchten Reihe ist. — Dies ist aber genau dasselbe Resultat, welches wir nach Laplace bereits (im §. 6.) gefunden haben.

§. 14.

Man kann sich der Entwickelungen auch als eines Mittels bedienen, um verschiedene Umformungen oder Relationen zu erhalten. — Entwickelt man nämlich eine und dieselbe Funktion f_x (etwa dadurch, daß man sie vorher umformt) zweimal in eine Reihe von derselben Form, und ist man überzeugt, daß diese verschiedenen Entwickelungen identisch seyn müssen, so müssen auch die Koeffizienten gleichnamiger Glieder in beiden dieselben seyn, und so wird man zu einer unendlichen Menge von Gleichungen geführt, von denen jede das Verhalten der Operationen zu einander in einer neuen Modification ausspricht.

Beispiel 1. Sind z. B. a, b, c, 2c. die m Wurzelwerthe der höhern Gleichung

$$z^m+k_1\cdot z^{m-1}+k_2\cdot z^{m-2}+\cdots\cdots+k_{m-1}\cdot z+k_m = 0,$$

so hat man bekanntlich

$$(z-a)(z-b)(z-c)\cdots \qquad = z^m+k_1\cdot z^{m-1}+k_2\cdot z^{m-2}+\cdots$$

d. h. wenn man $\frac{1}{x}$ statt z setzt und links und rechts mit x^m multiplicirt,

$$\text{I.} \qquad (1-ax)(1-bx)(1-cx)\cdots$$
$$= 1+k_1\cdot x+k_2\cdot x^2+k_3\cdot x^3+\cdots+k_m\cdot x^m.$$

Hieraus folgt aber, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$log\,(1-ax)+log\,(1-bx)+log\,(1-cx)+\cdots$$
$$= log\,(1+k_1\cdot x+k_2\cdot x^2+k_3\cdot x^3+\cdots),$$

während $log(1-ax) = -(ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{3}a^3x^3+\frac{1}{4}a^4x^4+\cdots)$ ist. Entwickelt man nun links und rechts diese Logarithmen in unendliche Reihen, die nach Potenzen von x fortlaufen (nach dem Muster des §. 11., so daß hier k_{a+1} statt des dortigen C_{a+1} zu stehen kommt und

$$-(a+b+c+\cdots) = R_1$$
$$-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+\cdots) = R_2$$
$$-\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3+\cdots) = R_3$$

also

II. $$-(c+1)\cdot R_{c+1} = a^{c+1}+b^{c+1}+c^{c+1}+\cdots = S_{c+1}$$

wird, wenn S_{c+1}, die Summe der $(c+1)^{ten}$ Potenzen aller Wurzelwerthe vorstellt), — so geht die Gleichung §. 11. C. über in

III. $$S\left[n\cdot k_n+k_b\cdot S_{c+1}\right]_{b+c\,=\,n-1} = 0$$

d. h. wenn man nun $0, 1, 2, 3, \cdots n-1$ statt c setzt, in

IV. $$n\cdot k_n+k_{n-1}\cdot S_1+k_{n-2}\cdot S_2+k_{n-3}\cdot S_3+\cdots+k_1\cdot S_{n-1}+S_n = 0,$$

welches eine sehr schöne Relation zwischen den Koeffizienten k_1, k_2, k_3, k_4, ꝛc. ꝛc. einer höheren Gleichung und den Potenz-Summen ihrer Wurzelwerthe ist und zwar dieselbe, die wir im II. Th. d. S. §§. 472. 473. auf ganz anderem Wege (unter dem Namen des Newton'schen Lehrsatzes) gefunden haben*).

---

*) Wir können diese Gelegenheit nicht vorbeigehen lassen, ohne darauf aufmerksam zu machen, wie Euler diesen Newton'schen Lehrsatz benutzt hat, um die Werthe der (convergenten) reciproken Reihen (S. Introd. in analysin infinitorum Cap. X.)

$$1)\quad \begin{cases} s_2 = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+ \text{ in inf.} \\ s_4 = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+ \text{ in inf.} \\ s_{2n} = 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+ \text{ in inf.} \end{cases}$$

Beispiel 2. Ein anderes Mal wünschen wir Relationen zwischen Binomial-Koeffizienten; wir nehmen daher irgend eine Umformung von Aus-

---

zu finden. Er geht nämlich von der Zerlegung der Reihe *Sin* x in ihre unendlich viele Faktoren aus (also von der Gleichung I. des §. 13. Nr. 5. d. Einleitg.) d. h. (indem man durch x dividirt und nachgehend x statt x^2 setzt) von der Gleichung

$$2)\qquad \left(1-\frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x}{4^2\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$
$$= 1-\frac{1}{3!}\cdot x+\frac{1}{5!}\cdot x^2-\frac{1}{7!}\cdot x^3+\frac{1}{9!}\cdot x^4- \text{ in inf.}$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen I., so findet sich

$$3)\qquad a=\frac{1}{\pi^2}\cdot 1,\qquad b=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2^2},\qquad c=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{3^2},\quad \text{u. s. w.}$$

dagegen

$$4)\qquad k_1=-\frac{1}{3!},\qquad k_2=+\frac{1}{5!},\qquad k_3=-\frac{1}{7!},\quad \text{u. s. f.},$$

während $\quad k_{2r-1}=-\dfrac{1}{(4r-1)!}\quad$ und $\quad k_{2r}=+\dfrac{1}{(4r+1)!}$

wird, und jetzt

$$5)\qquad S_{c+1}=\frac{1}{\pi^{2(c+1)}}\cdot\left[1+\frac{1}{2^{2(c+1)}}+\frac{1}{3^{2(c+1)}}+\frac{1}{4^{2(c+1)}}+\text{ in inf.}\right]$$

ist, d. h.

$$6)\qquad S_{c+1}=\frac{1}{\pi^{2c+2}}\cdot s_{2c+2},$$

wenn s die Bedeutung hat, wie in N. 1.

Die obige Gleichung III. oder IV. giebt daher jetzt

$$\mp n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\pm\frac{1}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot s_2\mp\frac{1}{(2n-3)!}\cdot\frac{1}{\pi^4}\cdot s_4\pm\frac{1}{(2n-5)!}\cdot\frac{1}{\pi^6}\cdot s_6\mp\cdots$$
$$-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{\pi^{2n-2}}\cdot s_{2n-2}+\frac{1}{\pi^{2n}}\cdot s_{2n}=0,$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn n ungerade ist, die unteren dagegen, wenn n gerade.

Setzt man nun hier herein nach und nach 1, 2, 3, 4, 2c. 2c. statt n, so erhält man die einzelnen Gleichungen, aus denen sich nach und nach die Summen der durch s_2, s_4, s_6, s_8, 2c. 2c. bezeichneten Reihen der reciproken Potenzen (mit geraden Exponenten) ohne Weiteres finden lassen.

drücken, in denen Potenzen eines Binomiums vorkommen, entwickeln jede der beiden Formen nach Potenzen von x und vergleichen die Koeffizienten

---

Man findet nämlich:

$$s_2 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{1}\cdot\pi^2 = \frac{\pi^2}{6};$$

$$s_4 = \frac{2^2}{5!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^4 = \frac{\pi^4}{90};$$

$$s_6 = \frac{2^4}{7!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^6 = \frac{\pi^6}{945};$$

$$s_8 = \frac{2^6}{9!}\cdot\frac{3}{5}\cdot\pi^8 = \frac{\pi^8}{9450};$$

$$s_{10} = \frac{2^8}{11!}\cdot\frac{5}{3}\cdot\pi^{10} = \frac{\pi^{10}}{93565};$$

$$s_{12} = \frac{2^{10}}{13!}\cdot\frac{691}{105}\cdot\pi^{12};$$

$$s_{14} = \frac{2^{12}}{15!}\cdot\frac{35}{1}\cdot\pi^{14};$$

$$s_{16} = \frac{2^{14}}{17!}\cdot\frac{3617}{15}\cdot\pi^{16};$$

u. s. w. f.

Nimmt man die Faktoren von *Cos* x, von *Sin* (xi) und von *Cos* (xi) und verfährt man auf dieselbe Weise, so erhält man analoge Gleichungen, wie die vorstehende 2., aus denen dann die Werthe analoger unendlichen Reihen gefunden werden. Z. B. die aus der analogen Behandlung von *Cos* (xi) hervorgehenden Resultate sind

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+ \text{ in inf. } = \frac{1}{1}\cdot\frac{\pi^2}{2^3};$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+ \text{ in inf. } = \frac{2}{3!}\cdot\frac{\pi^4}{2^5};$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+ \text{ in inf. } = \frac{16}{5!}\cdot\frac{\pi^6}{2^7};$$

$$1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+ \text{ in inf. } = \frac{272}{7!}\cdot\frac{\pi^8}{2^9};$$

u. s. w. f. —

Dieselben Resultate findet man aber auch, wenn man $\frac{s_{2n}}{2^{2n}}$ von s_{2n} subtrahirt. — Subtrahirt man aber das Doppelte von $\frac{s_{2n}}{2^{2n}}$ von s_{2n}, so erhält man die Werthe der convergenten unendlichen Reihen

der gleichnamigen Potenzen von x mit einander. — So ist z. B.

$$\left(1+x\right)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}\cdot\left(1+x\right)^{2n}.$$

Verwandeln wir nun den Ausdruck links (mittelst doppelter Anwendung des binom. Lehrsatzes) in eine Reihe die nach Potenzen von x fortläuft, so erhält man, wenn n_a, n_b die a^{ten}, b^{ten} Binomial-Koeffizienten der n^{ten} Potenz eines Binomiums vorstellen,

---

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\frac{1}{6^{2n}}+ \text{in inf.}$$

d. h. der Reihen der reciproken Potenzen aller natürlichen Zahlen mit geraden Exponenten und abwechselndem Vorzeichen.

Euler zerlegt auch noch zusammengesetztere Funktionen z. B.

$Cos\,\frac{1}{2}x+Cotg\,\frac{m}{2n}\pi\cdot Sin\,\frac{1}{2}x$ d. h. den Quotienten $\dfrac{Sin\,\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\pi+x\right)}{Sin\,\frac{m}{2n}\pi}$

in ihre unendlich vielen Faktoren und findet (mittelst der ganz analogen Behandlung) die Werthe neuer unendlicher und convergenter Reihen, namentlich (für m = 1, n = 2) die Werthe der folgenden Reihen reciproker Potenzen, nämlich

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}- \text{in inf.} = \frac{\pi}{4};$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}- \text{in inf.} = \frac{\pi^3}{32};$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}- \text{in inf.} = \frac{5\pi^5}{1536};$$

u. s. w. f., welche ungerade Dignanden, ungerade Exponenten und abwechselnde Vorzeichen haben.

Dagegen lassen sich die Werthe der unendlichen Reihen reciproker Potenzen aller natürlichen Zahlen mit ungeraden Exponenten, nämlich der Reihen

$$1+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{4^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}+ \text{in inf.}$$

auf diesem Wege nicht finden. (S. jedoch §. 20.).

$$1)\quad \left(1+x\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^n = S\left[n_a \cdot x^a\right] \cdot S\left[n_b \cdot \frac{1}{x^b}\right]$$
$$= S\left[n_a \cdot n_b \cdot x^{a-b}\right].$$

Auf der andern Seite hat man (nach demselben binomischen Lehrsatze)

$$2)\quad \frac{1}{x^n} \cdot \left(1+x\right)^{2n} = \frac{1}{x^n} \cdot S\left[(2n)_c \cdot x^c\right] = S\left[(2n)_c \cdot x^{-n+c}\right].$$

Setzt man nun von den beiden Reihen rechts (in 1. und in 2.) die Koeffizienten von x^ν einander gleich (indem man eben sowohl $a-b. = \nu$ als auch $-n+c = \nu$ setzt), wo ν positiv oder negativ ganz, oder Null seyn mag, so erhält man

$$3)\quad S\left[\underset{a-b=\nu}{n_a \cdot n_b}\right] = (2n)_{n+\nu} \quad \text{d. h.} \quad S\left[n_{b+\nu} \cdot n_b\right] = (2n)_{n+\nu},$$

wo jedoch n positiv ganz gedacht werden muß, und wo man nicht übersehen darf, daß Binomial-Koeffizienten mit negativen Zeigern nicht existiren, und Null an deren Stelle gesetzt werden muß.

Für $\nu = 0$ giebt diese Gleichung (3.)

$$4)\quad 1+(n_1)^2+(n_2)^2+(n_3)^2+(n_4)^2+\cdots = (2n)_n$$

d. h. die Summe der Quadrate aller Binomial-Koeffizienten der n^{ten} Potenz, ist dem mittleren Binomial-Koeffizienten der $(2n)^{ten}$ Potenz eines Binomiums gleich.

Für $\nu = -3$ dagegen würde die Gleichung 3.) liefern:

$$5)\quad 1 \cdot n_3+n_1 \cdot n_4+n_2 \cdot n_5+n_3 \cdot n_6+n_4 \cdot n_7+\cdots = (2n)_{n-3},$$

wenn nur n positiv ganz ist; und dasselbe liefert sie für $\nu = +3$, weil $(2n)_{n+3} = (2n)_{n-3}$ ist.

Anmerkg. Laplace in seiner Théorie des fonct. génératrices (S. Théorie des probabilités. oder auch Lacroix Traité du calcul. diff. et du calcul intégral. T. III. Chap. IV.) und Cauchy in seinem calcul des résidus (S. Exercises etc. 1826) haben auf Grund des vorstehenden §. 14.) eine Reihe

interessanter Vergleichungen aufgedeckt, auf welche wir später noch zurückkommen werden. Wir wollen hier zunächst nur noch in einigen Beispielen zeigen, wie man von der hier eben beschriebenen Methode auch mit Bewußtseyn Gebrauch machen kann.

Gesetzt man wollte $Sin\, nt$ mittelst der gedachten Methode umformen, während n positiv ganz gedacht wird, so würde man sich $Sin\, nt$ als den Koeffizienten von x^n einer unendlichen Reihe denken, dann von dieser unendlichen Reihe selbst, nämlich von

$$1) \qquad S[Sin\, at \cdot x^a]$$

zu der Funktion

$$2) \qquad \frac{x \cdot Sin\, t}{1-2x \cdot Cos\, t + x^2}$$

zurückkehren, deren Entwickelung sie ist *), dann aber diese letztere Funktion auf's Neue entwickeln (nach ganzen Potenzen von x); und der Koeffizient von x^n in dieser neuen Entwickelung ist dann nothwendig dem obigen gleich, so daß man nun $Sin\, nt$ in einer neuen Form ausgedrückt sieht.

Um die Entwickelung der Funktion in N. 2. zu bewirken, nehme man zuerst nach dem polynomischen Lehrsatze (§. 4. N. 7.)

$$(1-2x \cdot Cos\, t + x^2)^{-1} = S\left[\frac{(-1)^{a+b|-1}}{a!\; b!} \cdot (-2\, Cos\, t)^a \cdot x^n\right]_{a+2b=n}$$

Weil aber $(-1)^{a+b|-1} = (-1)^{a+b}(a+b)!$ und wiederum $\frac{(a+b)!}{a!\; b!} = \frac{(a+b)^{b|-1}}{b!} = (a+b)_b$ ist (wenn $(a+b)_b$ den b^{ten} Binomial-Koeffizienten der $(a+b)^{ten}$ Potenz irgend eines Binomiums vorstellt), so geht hieraus und wenn man noch mit $x \cdot Sin\, t$ multiplicirt die neue gesuchte Entwicklung hervor, nämlich

*) Dies, dem Probleme der Entwickelung gegenüber liegende Problem, wird das Problem der „Summation der Reihen" genannt, mit dessen Lösung wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen.

3) $\frac{x \cdot Sin\, t}{1-2x \cdot Cos\, t+x^2} = Sin\, t \cdot S\left[(-1)^{b}(a+b)_{b} \cdot (2\, Cos\, t)^{a} \cdot x^{a+1}\right]_{a+2b\,=\,n}$.

Nimmt man also nun hiervon ebenfalls den Koeffizienten von x^n, so erhält man

4) $Sin\, nt = Sin\, t \cdot S\left[(-1)^{b}(n-1-b)_{b} \cdot (2\, Cos\, t)^{n-1-2b}\right]_{a+2b\,=\,n-1}$,

welches die verlangte Umformung von $Sin\, nt$ ist, wenn nur n positiv ganz gedacht wird.

Für $n = 6$ z. B. hat man $a+2b = 5$, also für a und b die Werthe

a,	b
5	0
3	1
1	2,

und man findet daher

$$Sin\, 6t = Sin\, t \cdot [(2\, Cos\, t)^5 - 4(2\, Cos\, t)^3 + 3 \cdot 2\, Cos\, t].$$

Formt man die Funktion in N. 2. vorher erst noch um, z. B. in $\frac{x \cdot Sin\, t}{(1-x \cdot Cos\, t)^2+x^2 \cdot Sin\, t^2}$ und entwickelt man sie nun auf eine andere Art, etwa indem man den binomischen Lehrsatz anwendet um

5) $\left[(1-x \cdot Cos\, t)^2+(x \cdot Sin\, t)^2\right]^{-1}$

$$= S\left[\frac{(-1)^{b|-1}}{b!}(1-x \cdot Cos\, t)^{-2-2b} x^{2b} \cdot (Sin\, t)^{2b}\right]$$

zu erhalten, während $\frac{(-1)^{b|-1}}{b!} = (-1)^b$ ist, so wird man, wenn nur wieder alles nach ganzen Potenzen von x geordnet wird, eine neue Umformung von $Sin\, nt$ haben.

Man hat aber für jeden bestimmten Werth von b, abermals nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1-x \cdot Cos\, t)^{-2b-2} = S\left[\frac{(-2b-2)^{c|-1}}{c!} \cdot (-1)^c \cdot x^c \cdot (Cos\, t)^c\right].$$

Dies rechts in 5.) substituirt, giebt

$$\left[(1-x\cdot Cos\,t)^2+x^2\cdot Sin\,t^2\right]^{-1}$$
$$= S\left[(-1)^b\cdot\frac{(2b+2)^{c|+1}}{c!}\cdot(Cos\,t)^c\cdot(Sin\,t)^{2b}\cdot x^{2b+c}\right].$$

Multiplicirt man jetzt noch mit $x\cdot Sin\,t$, so hat man für die Funktion in N. 2. abermals seinen Zweck erreicht, und nimmt man dann von der Reihe zur Rechten den Koeffizienten von x^n, so giebt dies in Vergleichung mit der N. 1. sogleich (weil $(2b+2)^{c|1} = (2b+c+1)^{c|-1}$ ist)

$$6)\qquad Sin\,nt = S\left[(-1)^b\cdot n_c\cdot(Cos\,t)^c(Sin\,t)^{2b+1}\right]_{2b+c\,=\,n-1},$$

wenn n_c den Binomial-Koeffizienten $\frac{n^{c|-1}}{c!}$ vorstellt. So hat man eine neue Umformung von $Sin\,nt$ gefunden, wenn nur n positiv ganz ist.

Für $n = 6$ z. B. hat man wieder $2b+c = 5$, also für

die Werthe	b,	c
	0	5
	1	3
	2	1,

und die Gleichung 6.) giebt daher

$$Sin\,6t = 6\,(Cos\,t)^5\cdot Sin\,t - 20\,(Cos\,t)^3\cdot(Sin\,t)^3 + 6\,Cos\,t\cdot(Sin\,t)^5$$
$$= 2\,Sin\,t\cdot Cos\,t\cdot\left[3\,(Cos\,t)^4 - 10\,Cos\,t^2\cdot Sin\,t^2 + 3\,(Sin\,t)^4\right].$$

Es ist leicht auf demselben Wege eine größere Anzahl von Beispielen auszuführen.

Zweites Kapitel.

Einige Methoden der Summation der Reihen.

§. 15.

Geht man von einer gegebenen allgemeinen (unendlichen oder endlichen) Reihe zu der Funktion zurück, deren Entwickelung sie ist, so nennt man letztere ihre Summe*) und das Geschäft selbst die Summation der (unendlichen oder endlichen) gegebenen Reihe.

§. 16.

Es sind uns aber im Gedächtniß die Summen der einfachsten Reihen, nämlich 1) der geometrischen, 2) der Binomialreihe, 3) der logarithmischen; — ferner sind uns bekannt die Reihen, welche wir durch 4) e^x, 5) a^x, 6) $Sin\, x$ und 7) $Cos\, x$ bezeichnet haben, und bei denen wir diese Zeichen selbst als ihre „Summe" ansehen. (S. §. 4.)

Und da jede Reihen-Entwickelung, in Gleichung ausgesprochen, sobald man in dieser Gleichung die Reihe zuerst sich gegeben denkt, auch eine Summation enthält, so können uns noch die Summen mancher anderen Reihen bekannt geworden seyn.

Die nachstehenden Paragraphen werden nun lehren, wie auf bereits bekannte Summationen andere zurückgeführt werden.

---

*) Ist die Reihe numerisch und convergent, so gebrauchen wir statt des Wortes Summe, lieber das Wort „Werth" der Reihe, so daß wir das Wort Summe am liebsten nur im Sinne des Wortes „erzeugende Funktion" (fonction génératrice) gebrauchen.

§. 17.

Ist aber die Summe irgend einer nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe

$$C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots \quad \text{oder} \quad S[C_a\cdot x^a]$$

bekannt, so hat man sogleich auch

a) die Summe derselben Reihe aber mit abwechselnden Vorzeigen (indem man $-x$ statt x setzt);
b) die Summe derselben Reihe, wenn nur alle Glieder mit den geraden, oder nur alle Glieder mit den ungeraden Potenzen von x genommen werden (indem man die beiden vorgenannten addirt oder subtrahirt);
c) die Summen der letztern Reihen, wenn die Glieder noch abwechselnde Vorzeichen haben (indem man $x\cdot i$ statt x schreibt).
d) U. s. w.

Hat man also gefunden

1) $$S[C_a\cdot x^a] = f_x,$$

so hat man noch

2) $$S[(-1)^a\cdot C_a\cdot x^a] = f_{-x}$$

3) $$S[C_{2b}\cdot x^{2b}] = \tfrac{1}{2}(f_x+f_{-x})$$

4) $$S[C_{2b+1}\cdot x^{2b+1}] = \tfrac{1}{2}(f_x-f_{-x})$$

5) $$S[(-1)^b\cdot C_{2b}\cdot x^{2b}] = \tfrac{1}{2}(f_{x\cdot i}+f_{-x\cdot i})$$

6) $$S[(-1)^b\cdot C_{2b+1}\cdot x^{2b+1}] = \frac{1}{2i}(f_{xi}-f_{-xi});$$

u. s. w. f.

Sollte also irgend eine der Reihen 3.—6. zum Summiren gegeben seyn, so würde man versuchen, ob sich nicht die Summe der Reihe angeben lassen werde, welche nach demselben Gesetze gebildete Glieder hat, aber alle Potenzen von x enthält, d. h. der Reihe 1. oder 2.

Wäre also z. B. zu summiren die Reihe

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\cdots$$

so würde man unter den wenigen Elementar-Reihen sogleich die logarithmische als diejenige erkennen, deren Glieder dasselbe Gesetz befolgen, nämlich

$$x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\cdots = log\,(1+x);$$

daraus würde man folgern (indem $-x$ statt x gesetzt wird)

$$-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{5}x^5-\cdots = log\,(1-x);$$

daraus folgerte weiter, indem man subtrahirt,

$$x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\cdots = \tfrac{1}{2}\,log\,\frac{1+x}{1-x};$$

und weil unsere oben gegebene Reihe noch abwechselnde Vorzeichen hat, so würde man nun noch $x\cdot i$ statt x schreiben, und man erhält

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\cdots = \frac{1}{2i}\cdot log\,\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i};$$

und so findet sich die gegebene Reihe summirt, während aus

$$e^{zi} = Cos\,z+i\cdot Sin\,z$$

noch

$$e^{-zi} = Cos\,z-i\cdot Sin\,z,$$

folglich

$$e^{2zi} = \frac{Cos\,z+i\cdot Sin\,z}{Cos\,z-i\cdot Sin\,z} = \frac{1+i\cdot Tg\,z}{1-i\cdot Tg\,z}$$

also

$$z = \frac{1}{2i}\cdot log\,\frac{1+i\cdot Tg\,z}{1-i\cdot Tg\,z},$$

d. h. hervorgeht, daß $\frac{1}{2i}\cdot log\,\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}$ diejenige logarithmische Funktion von x ist, welche wir durch $\overset{1}{Tg}\,x$ bezeichnet haben und welche in *Arc tg.* x übergeht, so oft x reell ist und man überdieß weiß, daß der kleinste (positive oder negative) Bogen genommen werden muß. (Vgl. Einleitg. §. 10. und Anmerkg. zu §. 11. der Einleitg.).

Als zweites Beispiel nehmen wir die Reihe

$$m_1\cdot x-m_3\cdot x^3+m_5\cdot x^5-m_7\cdot x^7+\cdots \quad \text{oder} \quad S\Big[(-1)^a m_{2a+1}\cdot x^{2a+1}\Big],$$

welche unter der Voraussetzung summirt werden soll, daß m_{2a+1} Binomial-Koeffizienten sind (der m^{ten} Potenz eines Binomiums). In diesem Falle wird man darauf hingewiesen von der Binomialreihe auszugehen d. h. von der Gleichung

$$1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+m_4x^4+m_5x^5+\cdots = (1+x)^m;$$

darin $-x$ statt x zu setzen und die neue Gleichung von der alten zu subtrahiren; dies giebt

$$m_1 x + m_3 x^3 + m_5 x^5 + m_7 x^7 + \cdots = \frac{(1+x)^m - (1-x)^m}{2}.$$

Weil aber die zu summirende Reihe abwechselnde Vorzeichen hat, so wird man noch $x \cdot i$ statt x setzen; dann erhält man

$$m_1 x - m_3 x^3 + m_5 x^5 - m_7 x^7 + \cdots = \frac{(1+x \cdot i)^m - (1-x \cdot i)^m}{2i},$$

so daß man nun die „Summe" der gegebenen Reihe gefunden hat.

Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, daß wenn m (positiv oder negativ) gebrochen seyn sollte, dann von jeder der m^{ten} Potenzen zur Rechten nur ein einziger bestimmter Werth genommen werden darf, und daß, welcher gerade genommen werden müsse, in jedem besonderen Falle noch zu untersuchen bleibt.

§. 18.

Kennt man die Summe irgend einer endlichen oder unendlichen Reihe z. B.

$$1) \qquad S[C_a \cdot x^a] = f_x,$$

so kann man daraus sogleich die Summen der beiden, aus eben so vielen Gliedern bestehenden (also endlichen oder unendlichen) Reihen

$$2) \quad S[C_a \cdot x^a \cdot \mathit{Cos}\, at] \quad \text{und} \quad 3) \quad S[C_a \cdot x^a \cdot \mathit{Sin}\, at]$$

ableiten (deren Glieder auch noch nach Cosinus und Sinus der vielfachen Bogen fortlaufen). — Setzt man nämlich $\frac{e^{at \cdot i} + e^{-at \cdot i}}{2}$ und $\frac{e^{at \cdot i} - e^{-at \cdot i}}{2i}$ statt $\mathit{Cos}\, at$ und $\mathit{Sin}\, at$, so zerfällt jede der beiden gegebenen Reihen 2.) und 3.) in die Summe oder Differenz zweier Reihen, welche genau wie die 1.) sind, aber entweder $x \cdot e^{t \cdot i}$ oder $x \cdot e^{-t \cdot i}$ statt des dortigen x, geschrieben enthalten. Aus

$$1) \qquad S[C_a \cdot x^a] = f_x$$

geht daher sogleich hervor

$$2) \qquad S[C_a \cdot \mathit{Cos}\, at \cdot x^a] = \tfrac{1}{2}(f_{x \cdot e^{t \cdot i}} + f_{x \cdot e^{-t \cdot i}})$$

und 3) $S[C_a \cdot Sin\, at \cdot x^a] = \frac{1}{2i} \cdot (f_{x \cdot e^{t \cdot i}} - f_{x \cdot e^{-t \cdot i}})$.

So brauchten wir in der Anmerkg. zu §. 14. die Summe der Reihe

$$x \cdot Sin\, t + x^2 \cdot Sin\, 2t + x^3 \cdot Sin\, 3t + x^4 \cdot Sin\, 4t + \cdots;$$

wir suchten daher die Summe der einfacheren (geometrischen) Reihe

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

und bildeten daraus sogleich (nach 3.)

$$x \cdot Sin\, t + x^2 \cdot Sin\, 2t + x^3 \cdot Sin\, 3t + \cdots = \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{x \cdot e^{t \cdot i}}{1 - x \cdot e^{t \cdot i}} - \frac{x \cdot e^{-t \cdot i}}{1 - x \cdot e^{-t \cdot i}}\right)$$

und dieser letztere Ausdruck formte sich dann sogleich um in

$\frac{1}{2i} \cdot \frac{x \cdot (e^{ti} - e^{-ti})}{1 - x(e^{ti} + e^{-ti}) + x^2}$ d. h. in $\frac{x \cdot Sin\, t}{1 - 2x \cdot Cos\, t + x^2}$, wie wir dort angegeben haben.

Dabei können natürlich in 1.—3. die Koeffizienten C_0, C_1, C_2, C_3, ꝛc. ganz beliebig, mithin theilweise auch Null seyn, so daß das gelehrte auch anwendbar ist auf die Fälle, wo entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x vorkommen sollten; u. s. w.

§. 19.

Man kann auch dadurch eine gegebene Reihe auf eine andere bereits summirte zurückführen, daß man selbige ein oder einige Male differenzirt oder integrirt.

Beispiel 1. Ist z. B. zu summiren die Reihe

1) $$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \text{in inf.},$$

so geht sie, wenn man solche nach x differenzirt, in die geometrische Reihe

2) $$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \text{in inf.}$$

über, deren Summe $= \frac{1}{1+x^2}$ ist. Folglich ist die Summe der Reihe 1.), $= \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$, wenn man die Constante zum

Integral so nimmt, daß letzteres mit $x = 0$ zugleich der Null gleich wird; und so findet sich wiederum, wie kurz vorher schon, die Summe der gegebenen Reihe 1.) $= \frac{1}{Tg}x$.

Beispiel 2. Ist zu summiren die unendliche Reihe

$$3) \qquad x - \frac{1}{3^2}x^3 + \frac{1}{5^2}x^5 - \frac{1}{7^2}x^7 + \frac{1}{9^2}x^9 - \text{in inf.} = f_x,$$

so ergiebt sich, wenn man differenziirt:

$$4) \qquad 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \text{in inf.} = \partial f_x.$$

Dasmal ist aber die Summe dieser letzteren Reihe nicht bekannt, doch das $x$fache derselben (nach Beisp. 1.), so daß man erhält die Gleichung

$$5) \qquad x \cdot \partial f_x = \frac{1}{Tg}x, \quad \text{d. h.} \quad f_x = \int_{x \div 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{Tg}x\right) \cdot dx \; {}^{*}),$$

in so ferne die durch das Integriren eingehende Konstante so bestimmt werden muß, daß $f_x = 0$ wird für $x = 0$.

Dieses Integriren in endlicher Form ist aber nicht ausführbar, so daß die Summe der unendlichen Reihe dasmal nur scheinbar gefunden ist.

Beispiel 3. Ist zu summiren die unendliche Reihe

$$6) \qquad 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \text{in inf.} \; (= f_x),$$

so integrire man sie und man erhält

$$7) \qquad x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \text{in inf.} \; (= \int f_x \cdot dx);$$

und da diese letztere (als geometrische) Reihe die Summe $\frac{x}{1+x}$ hat, so hat man

---

*) Ist $\int f \cdot dx = \varphi_x$, so bezeichnen wir durch $\int_{x+a} f \cdot dx$ die Differenz $\varphi_x - \varphi_a$, welche für $x = a$ der Null gleich wird. Vgl. System d. Math. IV. Th. §. 157.

8) $$f_x = \partial\left(\frac{x}{1+x}\right)_x = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2},$$

welches die gesuchte Summe der Reihe 6.) ist.

Es ist natürlich, daß, wenn die Reihe

9) $$x-2x^2+3x^3-4x^4+5x^5-\cdots$$

hätte summirt werden sollen, man sie vorher durch x dividirt hätte, um eine Reihe zu erhalten, die auf dem eben beschriebenen Wege summirt werden kann. Man hätte dann die Summe der Reihe 9,) erhalten $= \frac{x}{(1+x)^2}$.

Beispiel 4. Ist endlich zu summiren die endliche Reihe

10) $$x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n \quad (= f_x),$$

so hat man, wenn durch x dividirt und dann integrirt wird,

11) $$x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n \quad \left(=\int\left(\frac{1}{x}\cdot f_x\right)\cdot dx\right).$$

Diese geometrische Reihe 11.) giebt aber, summirt, $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$; folglich hat man zur Bestimmung der gesuchten Summe f_x die Gleichung

$$\int\left(\frac{1}{x}\cdot f_x\right)\cdot dx = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x}\cdot f_x = \partial\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)_x,$$

woraus sich ergiebt die Summe der Reihe 10.), nämlich

$$f_x = \frac{x-(n+1)\cdot x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \text{ *)}.$$

---

*) Wir haben nach Euler in der Note zu §. 14. die Summen der (numerischen und convergenten) Reihen der reciproken Potenzen mit geraden Exponenten in die Zahl π ausgedrückt gefunden. Auf dem hier oben beschriebenen Wege kann man nun die Summen der reciproken Reihen, mit (geraden und) ungeraden Exponenten zwar nicht finden, aber in bestimmte Integrale ausdrücken. — Aus

1) $$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+ \text{ in i f.} = -\frac{1}{x}\cdot log(1-x)$$
$$= \frac{1}{x}\cdot log\frac{1}{1-x}$$

§. 20.

Das im §. 19. nur beispielsweise angedeutete Verfahren ist, allgemeiner und bestimmter ausgesprochen, das Nachstehende: Um die Reihe

I. $S[C_a \cdot x^a] \quad (= f_x)$

zu summiren, muß man sie vorher mit px^r multipliciren, dabei aber p und r unbestimmt lassen, — dann die neue Reihe

II. $S[pC_a \cdot x^{r+a}] \quad (= px^r . f_x)$

entweder integriren oder differenziiren, so daß man erhält entweder

---

folgt nämlich, wenn man integrirt,

2) $$x+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{3^2}x^3+\frac{1}{4^2}x^4+\frac{1}{5^2}x^5+ \text{ in inf.} = \int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot log\frac{1}{1-x}\,dx.$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch x und integrirt man auf's Neue, so giebt dies

3) $$x+\frac{1}{2^3}x^2+\frac{1}{3^3}x^3+\frac{1}{4^3}x^4+\frac{1}{5^3}x^5+\cdots$$
$$=\int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot log\frac{1}{1-x}\,dx\right)\cdot dx.$$

Fährt man so fort, jede erhaltene Gleichung mit x zu dividiren und dann zu integriren und setzt man zuletzt in allen diesen Gleichungen links und rechts (aber natürlich erst nach gänzlich vollendet gedachter Integration) 1 statt x, so hat man die Werthe der Reihen der reciproken Potenzen, auf der rechten Seite (sowohl die mit geraden als auch die mit ungeraden Exponenten) in bestimmte Integrale ausgedrückt, die zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen sind.

So giebt z. B. die 3.) für $x = 1$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots=\int_{1\div 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot log\frac{1}{1-x}\,dx\right)\cdot dx.$$

Wir sind aber weit davon entfernt anzunehmen, daß dadurch der Werth der Reihe zur Linken wirklich gefunden wäre, in dem Sinne der obigen Definition.

III. $$S\left[\frac{pC_a}{r+a+1}\cdot x^{r+a+1}\right] \quad (=\int px^r\cdot f_x\cdot dx)$$

oder

IV. $$S[(r+a)pC_a\cdot x^{r+a-1}] \quad (=\partial(px^r\cdot f_x)_x);$$

zuletzt aber wird man es versuchen, ob nicht die unbestimmten p und r so bestimmt werden können, daß eine der Reihen (III. oder IV.) als eine bereits summirte erkannt, oder die Möglichkeit ihrer Summation gehofft wird. Ist nämlich φ_x bekannt als die Summe der Reihe III. oder der Reihe IV., so hat man

entweder die Gleichung $$\varphi_x = \int px^r\cdot f_x\cdot dx,$$

also $$f_x = \frac{1}{px^r}\cdot\partial\varphi_x$$

(und in diesem Falle ist die Summe der Reihe vollständig gefunden)

oder man hat die Gleichung $$\varphi_x = \partial(px^r\cdot f_x)_x,$$

also $$f_x = \frac{1}{px^r}\cdot\int\varphi_x\cdot dx$$

wenn in letzterem Integral die eingehende Konstante so bestimmt wird, daß f_x für $x=0$ auf das allererste Glied C_0 der gegebenen Reihe I. sich reducirt. Diese Integration wird sich aber, in endlicher Form, selten ausführen lassen.

Wir wollen dies Verfahren noch an folgenden Beispielen erläutern:

Beispiel 1. Gesetzt es wäre zu summiren die endliche Reihe von n Gliedern

1) $$S\left[(a+cb)\cdot x^{\alpha+c\beta}\right]_{c+b=n-1} {}^{*)} = f_x,$$

so würde man mit px^r multipliciren und integriren und erhalten

*) Diese untergesetzte Gleichung $c+b=n-1$ drückt nichts anders aus, als daß c alle Werthe $0, 1, 2, 3$ bis $n-1$ hat, aber keinen größern Werth als $n-1$ haben kann, weil sonst b negativ werden würde, was gegen die, über die kleinen deutschen Buchstaben ein für allemal gemachte Annahme seyn würde.

$$2) \qquad S\left[\frac{p\cdot(a+cb)}{r+1+\alpha+c\beta}\cdot x^{r+1+\alpha+c\beta}\right]_{c+\partial\,=\,n-1} = \int px^r\cdot f_x\cdot dx.$$

Nun würde man Zähler und Nenner einander gleich machen für jeden Werth von c (dadurch, daß man einzeln $bp=\beta$ und $ap=r+1+\alpha$ nimmt), woraus

$$3) \qquad p=\frac{\beta}{b} \quad \text{und} \quad r=\frac{a\beta}{b}-\alpha-1$$

hervorgeht. Die Reihe 2. ist nun bloß eine endliche geometrische Reihe, deren Summe

$$= x^{r+1+\alpha}\cdot\frac{1-x^{\beta n}}{1-x^{\beta}} = x^{\frac{a\beta}{b}}\cdot\frac{1-x^{\beta n}}{1-x^{\beta}}$$

gefunden wird. Man hat daher nun

$$4) \qquad f_x=\frac{b}{\beta x^r}\cdot\partial\left(x^{\frac{a\beta}{b}}\cdot\frac{1-x^{\beta n}}{1-x^{\beta}}\right)_x,$$

wo r den obigen Werth (aus 3.) vorstellt, so daß die Summe f_x vollständig gefunden ist*).

Beispiel 2. Ist aber zu summiren die endliche, aus n Gliedern bestehende Reihe

$$1) \qquad S\left[\frac{x^{\alpha+c\beta}}{a+cb}\right]_{c+\partial\,=\,n-1} = f_x,$$

so muß man mit px^r multipliciren und dann differenziiren; man erhält dann

$$2) \qquad S\left[\frac{p(r+\alpha+c\beta)}{a+cb}\cdot x^{r-1+\alpha+c\beta}\right]_{c+\partial\,=\,n-1} = \partial(px^r\cdot f_x)_x.$$

Nimmt man nun $\beta p=b$ und $pr+p\alpha=a$, so daß die Reihe 2.) eine geometrische wird, ihre Summe also

$$= x^{r-1+\alpha}\cdot\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}},$$

---

*) Hieher gehört die im 4ten Beispiel zu §. 19. summirte Reihe.

so hat man, da $p = \frac{b}{\beta}$ und $r = \frac{a\beta - b\alpha}{b}$ ist,

$$\partial(px^r \cdot f_x)_x = x^{\frac{a\beta}{b}-1} \cdot \frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}},$$

also $$f_x = \frac{\beta}{bx^r} \cdot \int x^{\frac{a\beta}{b}-1} \cdot \frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}} \cdot dx,$$

sobald man die Konstante gehörig bestimmt, so nämlich, daß f_x den Werth der Reihe giebt für irgend einen bestimmten gegebenen Werth von x.

In diesem Beispiel kann man natürlich die gegebene Reihe nicht eher für summirt halten, als man nicht das Integral, zu welchem man geführt wird, angeben kann.

Anmerkg. 1. Es ist leicht einzusehen, daß man auf diesem Wege die Summen der Reihen

$$S[(a+cb)(a_1+cb_1) \cdot x^c], \qquad S[(a+cb)(a_1+cb_1)(a_2+cb_2) \cdot x^c]$$

u. s. f. (sie mögen als endliche oder als unendliche gedacht werden) auf dem Wege des Differenziirens, also ohne alle Hindernisse wirklich wird herstellen können, daß man aber die Summen dieser anderen Reihen

$$S\left[\frac{x^c}{(a+cb)(a_1+cb_1)}\right], \qquad S\left[\frac{x^c}{(a+cb)(a_1+cb_1)(a_2+cb_2)}\right]$$

u. s. f., und daher auch dieser anderen Reihen

$$S\left[\frac{a+cb}{p+cq} \cdot x^c\right], \qquad S\left[\frac{(a+cb)(a_1+cb_1)}{p+cq} x^c\right],$$

$$S\left[\frac{(a+cb)\,x^c}{(p+cq)(p_1+cq_1)}\right], \text{ u. s. w. f.}$$

nur wird durch Integrale ausdrücken, welche scheinbar endliche Form haben, welche aber nichts desto weniger nur in Ausnahmsfällen wirklich (als algebraische oder transcendente Funktionen) in endlicher Form hergestellt werden können.

Anmerkg. 2. Euler findet noch für die Summe f_x einer hypergeometrischen Reihe (wie er sie nannte), nämlich der Reihe

$$S\left[\beta^{c|\alpha}\cdot x^c\right] \text{ oder } S\left[\beta^{2c|\alpha}\cdot x^c\right], \quad S\left[\frac{x^c}{b^{c|a}}\right], \quad S\left[\frac{\beta^{c|\alpha}}{b^{c|a}}\cdot x^c\right]$$

u. s. w., indem er sie auf die analoge Weise, wie hier in §. 20. zu sehen, behandelt, eine Differenzial-Gleichung, deren Integration aber ebenfalls nur in seltenen Ausnahmsfällen durchgeführt werden kann und dann für die Summation selbst von keinem Nutzen ist*).

---

*) Zu diesen hypergeometrischen Reihen gehört übrigens auch die Entwickelung von $(1+x)^{\frac{m}{n}}$; denn es ist

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = S\left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right]$$

während

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} = \frac{m(m-n)(m-2n)\cdots[m-(\mathfrak{b}-1)n]}{n\cdot 2n\cdot 3n\ \cdots\ \mathfrak{b}n} = \frac{m^{\mathfrak{b}|-n}}{n^{\mathfrak{b}|n}}$$

ist. Man hat daher

I. $$(1+x)^{\frac{m}{n}} = S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-n}}{n^{\mathfrak{b}|n}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right]$$

und

II. $$(1+x)^{-\frac{m}{n}} = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\frac{m^{\mathfrak{b}|n}}{n^{\mathfrak{b}|n}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right],$$

welche beide Reihen zu den oben aufgezählten hypergeometrischen Reihen gehören.

Wäre also zu summiren die hypergeometrische Reihe

1) $$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^6+\cdots$$

d. h. die Reihe

1) $$S\left[\frac{1^{\mathfrak{b}|2}}{2^{\mathfrak{b}|2}}\cdot x^{2\mathfrak{b}}\right],$$

so würde man sogleich $-z$ statt x^2 setzen und erhalten die Reihe

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\frac{1^{\mathfrak{b}|2}}{2^{\mathfrak{b}|2}}\cdot z^{\mathfrak{b}}\right]$$

Auf diesem Wege findet man

$$1\cdot x-2!\,x^2+3!\,x^3-4!\,x^4+5!\,x^5- \text{ rc.}$$

d. h. $$S\left[(-1)^c\cdot(c+1)!\,x^{c+1}\right]=\frac{1}{x}\cdot e^{1:x}\cdot\int_{x\div 0} e^{-1:x}\cdot dx.$$

§. 21.

Parseval stellt noch folgenden Lehrsatz auf: Wenn die Summen f_x und φ_x der Reihen

1) $S\left[A_c\cdot x^c\right]=f_x$ und 2) $S\left[B_c\cdot\frac{1}{x^c}\right]=\varphi_x$

bekannt sind, so ist der Werth der als convergent vorausgesetzten Reihe

---

deren Summe (nach II.) sogleich bekannt, nämlich $=(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ seyn würde. Man hätte also gefunden

2) $$S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\cdot x^{2b}\right]=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist also z. B. zu summiren die Reihe

3) $$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot2}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots$$

d. h. die Reihe

4) $$S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\cdot\frac{x^{2b+1}}{2b+1}\right]\quad(=f_x)$$

so wird man sie nach den §§. 19. 20. vor allen Dingen differenziiren und erhalten die hypergeometrische Reihe

5) $$S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\cdot x^{2b}\right]\quad(=\partial f_x),$$

deren Summe $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ wir so eben (in 2.) gefunden haben. Also hat man

6) $$f_x=\int_{x\div 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\frac{1}{Sin}x;$$

d. h. die Summe der gegebenen unendlichen Reihe 3) ist diejenige logarithmische Funktion von x, deren Sinus genau x selbst ist.

$$3) \qquad S\left[A_c \cdot B_c\right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\pi \div 0} \left(f_{e^{ui}} \cdot \varphi_{e^{ui}} + f_{e^{-ui}} \cdot \varphi_{e^{-ui}}\right) \cdot du.$$

Denn es ist

$$f_x \cdot \varphi_x = S[A_a \cdot B_b \cdot x^{a-b}];$$

folglich

$$f_{e^{ui}} \cdot \varphi_{e^{ui}} = S\left[A_a \cdot B_b \cdot e^{(a-b)ui}\right]$$
$$= S[A_a \cdot B_b \cdot \mathit{Cos}\,(a-b)u] + i \cdot S\left[A_a \cdot B_b \cdot \mathit{Sin}\,(a-b)u\right].$$

Integrirt man nun dieses Resultat nach u zwischen den Grenzen 0 und π, setzt man dann $-i$ statt i und addirt man die Resultate, so heben sich die zweiten Theile (welche i zum Faktor haben) weg und man erhält zum Resultat

$$2S\left[A_a \cdot B_b \cdot \frac{\mathit{Sin}\,(a-b)\,\pi}{a-b}\right]_{\text{für } a \gtrless b} + 2S[A_b \cdot B_b \cdot \pi]_{\text{für } a=b}.$$

Und dadurch ist der Satz erwiesen, weil der erstere Theil dieser letztern Summe $= 0$ ist.

§. 22.

Ist von einer zu summirenden unendlichen Reihe

$$S[C_a \cdot x^a]$$

das rekurrente Gesetz bekannt und ist solches linear d. h. von der Form

$$C_n + \alpha \cdot C_{n-1} + \beta \cdot C_{n-2} + \gamma \cdot C_{n-3} + \cdots + \mu \cdot C_{n-m} = k_n\ ^{*)},$$

so ist die Summe dieser Reihe allemal

$$= \frac{k_0 + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^2 + k_3 \cdot x^3 + \cdots}{1 + \alpha \cdot x + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x^3 + \cdots + \mu \cdot x^m}$$

(Vgl. Anmerkg. 2. zu §. 1.), während allemal $k_0 = C_0$ genommen werden muß.

Man kann auch, wenn man will, um die Werthe von k_n in dem rekurrenten Gesetze sich gar nicht bekümmern, so daß man

*) Auf diese Form kann man aber die Gleichung auch dann bringen, wenn C_n selbst noch einen Koeffizienten p haben sollte, weil man sie sofort durch p wegdividiren kann.

nur den Nenner des Bruches kennt, dann aber den Zähler dadurch dazu finden, daß man ihn mit unbestimmten Koeffizienten annimmt, den Bruch entwickelt, die Entwickelung mit der zu summirenden Reihe vergleicht und dann aus dieser Vergleichung die vorher unbestimmt gelassenen Koeffizienten $k_0, k_1, k_2, k_3, \cdots$ bestimmt.

So hat man die Summe der geometrischen Reihe

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots,$$

weil sie eine rekurrente $S\left[C_a \cdot x^a\right]$ mit dem Gesetze

$C_n - C_{n-1} = 0$ und $C_0 = 1 = k_0$ ist, augenblicklich $= \frac{1}{1-x}$ gefunden, während die Reihe

$$x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \cdots,$$

indem man x^a heraushebt und $x^b = z$ setzt, auf dieselbe, nämlich auf

$$x^a(1+z+z^2+z^3+\cdots) = x^a \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{x^a}{1-x^b}$$

sich zurückzieht.

Anmerkg. Auf diesem Wege können namentlich auch alle Reihen $S[C_a x^a]$ summirt werden, in denen der Koeffizient C_a irgend eine ganze Funktion des Zeigers a ist (also eine der Formen

$$a+ab \quad \text{oder} \quad a+ab+a^2c \quad \text{oder} \quad a+ab+a^2c+a^3d,$$

u. s. w. f. hat), weil (wie später aus §. 62. hervorgeht), wenn C_a in Bezug auf a von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, dann allemal

$$C_n - m_1 \cdot C_{n-1} + m_2 \cdot C_{n-2} - m_3 \cdot C_{n-3} + \cdots \pm C_{n-m} = 0$$

seyn wird (so lange nur $n \geqq m$ gedacht ist), während $m_1, m_2, m_3,$ rc. rc. Binomial-Koeffizienten vorstellen; — so daß der Nenner der gesuchten Summe

$$1 - m_1 x + m_2 x^2 - m_3 x^3 + \cdots \pm x^m \quad \text{d. h.} \quad (1-x)^m$$

seyn wird, während der Zähler dann noch auf die oben beschriebene Weise dazu gefunden werden muß.

Zu diesen letzteren Reihen gehören aber wiederum alle die Reihen von der Form

$$S[(a+cb)x^c],\qquad S[(a+cb)(a_1+cb_1)x^c],$$
$$S[(a+cb)(a_1+cb_1)(a_2+cb_2)x^c],\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

deren Summation (nach Anmerkg. 1. zu §. 20.) auch mittelst des Verfahrens der §§. 19. 20. bewerkstelligt werden kann.

§. 23.

Endlich ist leicht einzusehen, daß man auch die Summe einer endlichen und rekurrenten Reihe finden kann, also z. B. der Reihe $S[C_a x^a]$, wenn man sie nur bis zum Gliede $C_n x^n$ genommen denkt, — weil die übrigen Glieder

$$C_{n+1}\cdot x^{n+1}+C_{n+2}\cdot x^{n+2}+C_{n+3}\cdot x^{n+3}+ \text{ in inf.}$$

wiederum eine unendliche rekurrente Reihe bilden, welche dasselbe Gesetz befolgt, deren „Summe" also wieder gefunden und von der Summe der ganzen Reihe subtrahirt werden kann.

Es sey z. B. noch einmal zu summiren die rekurrente und endliche Reihe

$$1)\qquad x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots+px^p.$$

Vergleicht man sie mit der Reihe

$$2)\qquad C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\cdots,$$

so hat man $C_0 = 0$ und in so ferne die Koeffizienten die Form $a+ab$ haben d. h. eine arithmetische Reihe bilden, so hat man das rekurrente Gesetz

$$C_n-2C_{n-1}+C_{n-2} = 0$$

wenn $n \overline{\overline{>}} 2$ ist, und außerdem noch $C_1-2C_0 = +1 = k_1$; während $k_0 = C_0 = 0$ ist. Man hat also $k_0 = 0$, $k_1 = 1$ und $k_n = 0$ für $n \overline{\overline{>}} 2$; die Summe der gegebenen, aber unendlich gedachten Reihe

$$x+2x^2+3x^3+ \text{ in inf.}$$

ist daher $= \dfrac{x}{1-2x+x^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Die unendliche Reihe, welche die nach dem p^{ten} Gliede folgenden Glieder bilden, ist nun

$$3)\qquad (p+1)x^{p+1}+(p+2)x^{p+2}+(p+3)x^{p+3}+\ldots$$

d. h. $x^{p+1}.[(p+1)+(p+2)x+(p+3)x^2+ \text{ in inf.}]$.

Wird nun diese eingeklammerte Reihe mit

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots$$

verglichen, so hat man wiederum

$$C_n-2C_{n-1}+C_{n-2}=0,$$

so oft $n \geqq 2$ ist; außerdem aber findet sich

$$C_1-2C_0 \quad = -p \ = k_1,$$

während $k_0 = C_0 = p+1$ ist. Die Summe dieser unendlichen Reihe (3.) ist daher $= \frac{(p+1)-px}{1-2x+x^2}$;

folglich ist die Summe der endlichen Reihe 1.)

$$= \frac{x-(p+1)x^{p+1}+px^{p+2}}{(1-x)^2},$$

d. h. gerade so, wie wir dieselbe im 4ten Beispiel zu §. 19. auf jenem Wege ebenfalls gefunden haben.

Drittes Kapitel.

Einige Kennzeichen der Convergenz der Reihen. Von den (Summen-) Werthen convergenter Reihen.

§. 24.

So wie man sich alle Glieder einer unendlichen Reihe als reelle oder imaginäre Ziffernwerthe denkt (also von der Form $p+q \cdot i$, wo $q=0$ oder q nicht Null seyn kann), so ist die Reihe nicht mehr allgemein, sondern eine **numerische**. — Ist nun in einer solchen numerischen Reihe das Gesetz des Fortschreitens der einzelnen Glieder (bis ins Unendliche) vorher genau festgestellt, so wird die Summe der n ersten Glieder eine Funktion von n von der Form S_n oder auch von der Form $P_n+Q_n \cdot i$ seyn, und es wird diese Summe der ersten n Glieder für $n=\infty$ 1) entweder unbestimmt *), oder 2) (reell oder imaginär) unendlich groß (S. Einleitg. §. 15.), oder 3) (reell oder imaginär aber) endlich seyn **). — In den beiden erstern Fällen wird

---

*) So ist z. B. in der unendlichen Reihe $S[Cos\, at]$ die Summe der ersten n Glieder (nach §. 18. für $x=1$)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-Cos\, t + Cos(n-1)t - Cos\, nt}{1-Cos\, t}$$

und diese Summe wird unbestimmt für **jeden** numerischen Werth von t, so wie man $n=\infty$ nimmt.

**) Wenn wir sagen: eine Funktion von n, nämlich S_n (oder $P_n+Q_n \cdot i$), nehme für $n=\infty$ einen bestimmten und endlichen Werth an, so verstehen wir darunter, daß es einen bestimmten Werth A (oder $B+C \cdot i$) giebt, dem sich S_n (oder $P_n+Q_n \cdot i$) desto mehr nähert, je größer n genommen wird, und zwar so, daß der Unterschied $S_n - A$ (oder $P_n+Q_n \cdot i - B - C \cdot i$) für

die numerische Reihe eine divergente genannt und mit einer solchen ist keine weitere „Rechnung“ möglich; sie ist eben so ein im Kalkul unzulässiger Ausdruck, wie $\frac{1}{0}$, $\log 0$, 0^0, u. dgl. m. — Im dritten Falle dagegen heißt die numerische Reihe convergent und das, was aus der Summe

$$S_n \quad \text{oder} \quad P_n + Q_n \cdot i$$

ihrer n ersten Glieder wird, so oft man $n = \infty$ nimmt (und positiv ganz) heißt ihr Summenwerth oder schlechthin ihr Werth, der entweder reell oder imaginär, aber von der Form $p + q \cdot i$ ist. — Auch in diesem dritten Falle wird mit der unendlichen Reihe als solcher, d. h. als Form nicht weiter „gerechnet“, sondern nur mit ihr als dem Repräsentanten ihres Werthes.

Danach sind divergent die unendlichen Reihen

$$S[\mathit{Cos}\, at] \quad \text{und} \quad S[\mathit{Sin}\, at]$$

für jeden numerischen Werth von t, der nicht $= 0$ ist.

Ferner ist divergent die geometrische Reihe

$$S[b \cdot x^a] \quad \text{d. h.} \quad b + bx + bx^2 + bx^3 + \text{in inf.},$$

so oft $x \overset{=}{>} 1$; dagegen ist dieselbe Reihe convergent, so oft $x < 1$ ist, wenn auch von der 1 um noch so wenig (aber etwas endliches) verschieden; denn es ist die Summe ihrer n ersten Glieder

$$= b\frac{1-x^n}{1-x} = b\frac{1}{1-x} - b\frac{x^n}{1-x}$$

und von dieser Summe wird der zweite Theil $b\frac{x^n}{1-x}$ (für $n = \infty$) selbst unendlich-groß, so oft $x > 1$, und unendlich-klein, so oft $x < 1$ ist; für $x = 1$, wird die Summe von n Gliedern der Reihe $b + b + b + b + b + \cdots = bn$, folglich mit n zugleich unendlich-groß.

$n = \infty$, unendlich-klein wird, d. h. kleiner noch als jede noch so klein gedachte, aber bestimmte (reelle oder imaginäre) Zahl. (S. Einleitg. §. 15.).

Dieselbe Reihe $S[b \cdot x^n]$ ist aber auch convergent oder divergent für jeden imaginären Werth $x = p+q \cdot i = r \cdot e^{\psi \cdot i} = r \cdot (Cos\,\psi + i \cdot Sin\,\psi)$, je nachdem der Modul r des imaginären Werthes (also $+\sqrt{p^2+q^2}$), <1 oder $\overline{\overline{>}}1$ ist, eben weil

$$\frac{x^n}{1-x} = \frac{r^n \cdot (Cos\,n\psi + i \cdot Sin\,n\psi)}{1-r(Cos\,\psi + i \cdot Sin\,\psi)}$$

$$= \frac{r^n \cdot [Cos\,n\psi + i \cdot Sin\,n\psi] - r^{n+1}[Cos\,(n-1)\psi + i \cdot Sin\,(n-1)\psi]}{1-2r \cdot Cos\,\psi + r^2}$$

für $r>1$ unendlich-groß, für $r=1$ unbestimmt, und für $r<1$ unendlich-klein wird, so oft man $n=\infty$ sich denkt.

§. 25.

Eine unendliche Reihe

$$u_0+u_1+u_2+u_3+ \text{ in inf.}$$

ist ganz gewiß divergent

1) wenn das n^{te} Glied u_n für $n=\infty$ nicht unendlich-klein ist; — dagegen kann dieses Glied für $n=\infty$ unendlich-klein werden, und die gedachte Reihe ist deshalb noch nicht nothwendig convergent.

So ist z. B. die harmonische Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+4b}+ \text{ in inf.},$$

wo wir a reell und b positiv uns denken, divergent, obgleich das n^{te} Glied $\frac{1}{a+nb}$ für $n=\infty$, unendlich-klein wird, da die Summe der nächsten n Glieder

$$\frac{1}{a+(n+1)b}+\frac{1}{a+(n+2)b}+\frac{1}{a+(n+3)b}+\cdots+\frac{1}{a+2nb}$$

jedenfalls größer als das $n$fache des letzten (kleinsten) Gliedes $\frac{1}{a+2nb}$, d. h. größer als $\frac{n}{a+2nb}$ d. h. größer als $\frac{1}{\frac{a}{n}+2b}$ ist, also die Summe dieser n Glieder für $n=\infty$, $>\frac{1}{2b}$ d. h. nicht unendlich-klein

wird, weshalb die Summe der ersten n Glieder für $n = \infty$ keinen bestimmten endlichen Werth haben kann.

Ueberhaupt sieht man ein, daß die Reihe allemal divergent seyn muß

2) wenn die Summe aller übrigen Glieder, vom n^{ten} ab gerechnet, für $n = \infty$ nicht unendlich-klein wird.

3) Eine unendliche Reihe ist aber ganz gewiß convergent oder divergent, wenn sie von einem bestimmten r^{ten} Gliede ab convergent oder divergent ist, d. h. wenn die übrigen Glieder bis in's Unendliche fort eine neue Reihe bilden, welche convergent oder divergent ist.

§. 26.

Dagegen ist eine unendliche Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \text{ in inf.}$$

allemal convergent, wenn sie von einem bestimmten Gliede u_0 ab, immer kleiner werdende reelle Glieder hat und abwechselnde Vorzeichen.

Denn da die Reihe auch so

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \text{ in inf.}$$

und auch noch so

$$u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \text{ in inf.}$$

geschrieben werden kann, so ist, da jede der eingeklammerten Differenzen (der Voraussetzung gemäß) positiv ist, die Summe ihrer unendlich vielen Glieder offenbar $> u_0 - u_1$ und $< u_0$; also liegt ihr Werth zwischen völlig bestimmten Grenzen.

Aus diesem Grunde ist die Reihe

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1}\right], \text{ nämlich } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ in inf.}$$

eine convergente; und ihr „Werth" ist $= log\, 2$, da die Reihe für $log(1+x)$ für $x = 1$ in die vorliegende numerische Reihe übergeht.

Aus demselben Grunde ist die Reihe

$$S\left[(-1)^a\cdot\frac{1}{2a+1}\right] \quad \text{d. h.} \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-$$

convergent; und ihr „Werth" ist $=\frac{1}{4}\pi$, weil die Reihe für $\overset{1}{Tg}x$ für $x=1$ in die vorstehende übergeht (§. 19.) und das-mal $Arc\,tg.1$ giebt, welches $=\frac{1}{4}\pi$ ist. (S. Einl. §. 10.).

Daher sind die Reihen

$$S\left[(-1)^a\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

für $Sin\,x$ und $Cos\,x$, für jeden reellen Werth von x convergent, weil der Unterschied zweier auf einander folgenden Glieder, nämlich

$$\frac{x^r}{r!}-\frac{x^{r+2}}{(r+2)!}=\frac{x^r}{r!}\left[1-\frac{x^2}{(r+1)(r+2)}\right],$$

wie groß auch x gedacht worden seyn mag, doch positiv ist, sobald $r\overline{\overline{>}}x$ wird, so daß die Reihe von diesem Gliede ab lauter kleiner werdende Glieder mit abwechselnden Vorzeichen hat.

Anmerkg. Da eine Reihe, deren Glieder im Unendlichen nicht mehr abnehmen, ganz gewiß divergent ist, so wollen wir von jetzt ab bloß Reihen betrachten, deren Glieder alle positiv sind und im Unendlichen stets abnehmen.

§. 27.

1) Eine Reihe

U oder $\quad u_0+u_1+u_2+u_3+$ in inf.

mit lauter positiven Gliedern ist nothwendig $\begin{Bmatrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{Bmatrix}$, so oft ihre Glieder von einem bestimmten Gliede ab $\begin{Bmatrix}\text{schneller noch}\\ \text{weniger schnell}\end{Bmatrix}$ oder eben so schnell abnehmen, als die Glieder einer anderen schon als $\begin{Bmatrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{Bmatrix}$ bekannten Reihe

V oder $v_0+v_1+v_2+v_3+$ in inf.,

die ebenfalls lauter positive Glieder hat; — also wenn für irgend einen bestimmten und dann auch für jeden noch größern Werth von n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \lessgtr \frac{v_{n+1}}{v_n}$ oder $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ist.

Daher ist die unendliche Reihe

$$e^x \text{ d. h. } S\left[\frac{x^a}{a!}\right] \text{ d. h. } 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+ \text{ in inf.}$$

für jeden positiven Werth von x convergent, weil der Quotient aus dem $(r+1)^{ten}$ Gliede durch das r^{te} Glied dividirt, $=\frac{x}{r+1}$ und daher <1 ist, sobald $r \gtreqless x$ wird. Die Glieder der fraglichen Reihe nehmen also von diesem r^{ten} Gliede an gerechnet, schneller ab als die geometrische Reihe

$$1+z+z^2+z^3+ \text{ in inf.},$$

wenn in ihr $z<1$ gedacht wird, so daß sie als convergent bereits anerkannt ist.

2) Eine unendliche Reihe

$$S[u_a] \text{ oder } u_0+u_1+u_2+u_3+ \text{ in inf.} \quad \ldots(U)$$

ist auch noch convergent, wenn a) die Werthe der Funktion u_z für jeden positiven und wachsenden Werth von z stets positiv und stets kleiner werden, und wenn noch b) sobald $\int u_z \cdot dz = \psi_z$ gefunden ist, die Differenz $\psi_z - \psi_0$ d. h. $\int_{z \div 0} u_z \cdot dz$ für $z = \infty$ einen endlichen bestimmten Werth annimmt. — Dagegen ist dieselbe unendliche Reihe divergent, so oft die Bedingung b) nicht erfüllt ist, während die Glieder im Unendlichen alle positiv bleiben, auch wenn sie stets kleiner werden sollten.

Denn es ist nach dem Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 7.), weil $\partial\psi_z = u_z$ ist,

$$\psi_{z+h} - \psi_z = u_{z+\theta h}, \text{ wo } \theta \text{ zwischen 0 und 1.}$$

Setzt man nun hier herein statt z nach und nach 0, 1, 2, 3 in inf. und $h = 1$, so hat man

$$\psi_1-\psi_0 = u_{1+\theta} \text{ d. h. } <u_1 \text{ und } >u_2\text{ *)}$$
$$\psi_2-\psi_1 = u_{2+\theta} \text{ d. h. } <u_2 \text{ und } >u_3$$
$$\psi_3-\psi_2 = u_{3+\theta} \text{ d. h. } <u_3 \text{ und } >u_4$$

u. s. w. f. — Addirt man nun alle diese unendlich vielen Ungleichungen, so erhält man

$$\psi_\infty-\psi_0 < u_1+u_2+u_3+u_4+ \text{ in inf.}$$
$$\text{aber } > u_2+u_3+u_4+u_5+ \text{ in inf.}$$

Die Reihe U ist also $>\psi_\infty-\psi_0$ aber $<u_1+\psi_\infty-\psi_0$, aus welchen Ungleichungen das Behauptete hervorgeht.

Will man also z. B. untersuchen, ob die unendliche Reihe

$$S\left[\frac{1}{(a+1)^m}\right] \text{ d. h. } 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+ \text{ in inf.},$$

in welcher m positiv gedacht wird, convergent ist, so suche man $\int z^{-m}\cdot dz = \frac{z^{-m+1}}{-m+1} = \psi_z$; und da findet man sogleich, daß die genannte Reihe divergent ist, so oft $m = 1$, dann auch, wenn $m<1$, daß sie aber convergent ist, so oft $m>1$, wenn auch der Unterschied $m-1$ noch so klein, wenn nur endlich ist **).

Auf demselben Wege überzeugt man sich auch noch, daß die geometrische unendliche Reihe

$$S\left[\frac{1}{m^a}\right] \left.\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\} \text{ ist, je nachdem } m^r \overset{>1}{\underset{\overline{\overline{<}}1}{\text{oder}}} \text{ ist,}$$

wie wir solches früher (§. 24.) schon gefunden haben; daß ferner convergent sind die unendlichen Reihen

$$S\left[\frac{1}{(a+2)[\log(a+2)]^m}\right], S\left[\frac{1}{(a+2)\log(a+2)\cdot[\log\log(a+2)]^m}\right],$$

u. s. w., so lange nur m positiv gedacht wird.

---

*) In so ferne nämlich u_z kleiner werden soll, so wie z wächst, und dabei $\theta<1$ ist.

**) Wir haben aber oben (Note zu §. 14.) den Werth dieser Reihen gefunden für den Fall, daß m irgend eine gerade Zahl ist. Ist m ungerade, so läßt sich (nach der Note zu §. 19.) der Werth dieser Reihen, so oft er existirt, d. h. so oft nicht $m=1$ ist, durch ein bestimmtes Integral ausdrücken.

3) Nehmen die stets positiv gedachten Glieder einer Reihe U, nämlich $u_1+u_2+u_3+$ in inf.
immer fort ab, so convergirt sie oder divergirt sie gleichzeitig mit dieser andern Reihe

V oder $v_1+v_2+v_3+$ in inf.,

so oft letztere so gebildet wird, daß man $v_n = r.u_r$ hat, während $2^{n-1} = r$ ist.

Denn es ist (nach der Annahme)

$u_1 = u_1$	$u_1 = u_1$
$2u_2 = 2u_2$	$2u_2 > u_2+u_3$
$4u_4 < 2u_3+2u_4$	$4u_4 > u_4+u_5+u_6+u_7$
$8u_8 < 2u_5+2u_6+2u_7+2u_8$	$8u_8 > u_8+u_9+u_{10}+\cdots+u_{15}$
u. s. w.	u. s. w.

Addirt man nun n solche Ungleichungen und bezeichnet man durch U_r, V_r bezüglich die Summen der r ersten Glieder der Reihen U und V, so findet sich (weil $2^{n-1} = r$ gesetzt worden ist) und weil $v_2 = 2u_2$, $v_3 = 4u_4$, $v_4 = 8u_8$, $v_5 = 16u_{16}$, ꝛc. ꝛc. ist,

$$V_n < 2U_r - u_1 \quad \text{und} \quad V_n > U_{r-1};$$

und aus diesen Ungleichungen folgert das Behauptete.

Aus der Anwendung dieses Satzes kann man auch wieder folgern, daß die Reihe

$$S\left[\frac{1}{(a+1)^m}\right] \text{ d. h. } 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+ \text{ in inf.} \quad \cdots(U)$$

convergent ist, wenn $m>1$, divergent aber, wenn $m \overline{\overline{<}} 1$ ist, in so ferne die Reihe V jetzt diese wird

$$S[2^{a(1-m)}] \text{ d. h. } 1+2^{1-m}+2^{2(1-m)}+2^{3(1-m)}+ \text{ in inf.},$$

letztere aber als eine geometrische, deren Exponent 2^{1-m} ist, convergirt oder divergirt, je nachdem $2^{1-m}<1$ oder $\overline{\overline{>}}1$ ist, d. h. je nachdem $1-m<0$ oder $1-m \overline{\overline{>}} 0$ ist.

§. 28.

Aus dem Satze §. 27. N. 1., indem man die Reihe

$$(U)\cdots \quad u_1+u_2+u_3+u_4+ \text{ in inf.}$$

bald mit der geometrischen, bald mit der harmonischen höherer Ordnung vergleicht, bald mit andern bereits als convergent anerkannten Reihen kann man noch nachstehende Kennzeichen der Convergenz ableiten.

1) Die Reihe U ist convergent, so oft $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n=\infty$, <1 ist, jedoch von der 1 noch um einen endlichen, wenn auch noch so kleinen aber bestimmten Werth, verschieden ist, und zwar weil sie dann im Unendlichen eben so schnell oder schneller noch als eine convergente geometrische Reihe abnimmt.

Ist $\frac{u_{n+1}}{u_n} \overset{=}{>} 1$ für $n=\infty$, so bleiben sich die Glieder der Reihe im Unendlichen einander gleich oder sie wachsen, und es ist also dann die Reihe nothwendig divergent.

2) Ist $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n=\infty$, $\overset{=}{<}\left(\frac{n}{n+1}\right)^r$ und $r>1$, so ist die Reihe convergent, weil sie dann im Unendlichen eben so schnell oder noch schneller abnimmt, als die für $r>1$ convergente harmonische Reihe höherer Ordnung

$$1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\frac{1}{5^r}+ \text{ in inf.}$$

3) Ist eine numerische unendliche Reihe $S[k_a]$ convergent, so ist auch die Reihe $S[k_a \cdot x^a]$ convergent, so oft man $x<1$ nimmt, eben so wie für $x=1$.

Nimmt man aber $x>1$, so ist die Reihe möglicher Weise divergent, jedoch noch convergent, sobald $\frac{k_{n+1}}{k_n}x$ für $n=\infty$ noch <1 wird, wenn nur von 1 um etwas Endliches verschieden.

4) Sind A_0, A_1, A_2, A_3, ꝛc. B_0, B_1, B_2, B_3, ꝛc. numerische und positive Werthe und sind die Reihen 1) $S[A_c \cdot x^c]$ und 2) $S[B_c \cdot x^c]$ für irgend einen positiven Werth von x convergent, so sind die Reihen

$$3)\ S[(A_c+B_c)\cdot x^c];\qquad 4)\ S[(A_c-B_c)\cdot x^c]$$

und

$$5)\ S\left[\begin{matrix}A_c\cdot B_d\cdot x^e\\ c+d=e\end{matrix}\right],$$

welche man durch Addition, Subtraktion und Multiplikation der erstern beiden Reihen erhält, wenn die Endresultate wieder nach Potenzen von x geordnet werden (was in der letztern Reihe dadurch geschieht, daß man statt e nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. ꝛc. und alle ganzen Zahlen nimmt, für jeden Werth von e aber statt c und d alle Werthe setzt, welche Null und positiv ganz sind und der Gleichung $c+d=e$ genügen) für denselben Werth von x wieder convergent.

Nimmt man nämlich von den erstern beiden Reihen nur die n ersten Glieder, so daß man

$$S\left[\begin{matrix}A_c\cdot x^c\\ c+f=n\end{matrix}\right]=S_n \quad \text{und} \quad S\left[\begin{matrix}B_c\cdot x^c\\ c+f=n\end{matrix}\right]=T_n \ \text{hat,}$$

und nimmt man von der Reihe 5.) auch nur die Summe der n ersten Glieder und bezeichnet P_n diese Summe und P_m die Summe von den m ersten Gliedern derselben Reihe 5.), so ist, wenn alle Glieder der Reihen 1.) und 2.) positiv sind, offenbar

$$P_n < S_n\cdot T_n \quad \text{und} \quad P_n > S_m\cdot T_m$$

wenn $m=\frac{n}{2}$ oder $=\frac{n-1}{2}$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade gedacht wird, weil P_n nicht alle Glieder des Produkts $S_n\cdot T_n$ enthält, während $S_m\cdot T_m$ offenbar nicht alle Glieder von P_n hat. Es liegt also P_n für $n=\infty$ noch zwischen den Grenzen $S_n\cdot T_n$ und $S_m\cdot T_m$, während für $n=\infty$ auch $m=\infty$ wird, diese letzteren Produkte sich also immer mehr dem Produkte der „Werthe" der beiden unendlichen Reihen 1.) und 2.) nähern und demselben unendlich nahe kommen. Es nimmt also P_n für $n=\infty$ einen bestimmten „Werth" an und zwar das Produkt der Werthe der beiden Faktoren.

Nimmt man x eben so groß aber negativ, so daß die Glieder

abwechselnde Vorzeichen bekommen, so ist natürlich die Convergenz ebenfalls außer Zweifel, wenn sie für den eben so großen positiven Werth von x vorhanden gewesen ist.

§. 29.

Gauß hat in der Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. etc. Sect. 3. (S. Comment. soc. reg. scient. Gottingensis recent. Vol. II.) sich mit der Untersuchung derjenigen Reihen U beschäftigt, in welchen der Quotient aus dem $n+1^{ten}$ Gliede durch das vorhergehende n^{te} dividirt, folgende Form hat, nämlich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + A_3 n^{h-3} + \dots + A_h}{n^h + B_1 n^{h-1} + B_2 n^{h-2} + B_3 n^{h-3} + \dots + B_h} \text{ *)}.$$

Er findet für selbige:

1) Die Reihe U ist steigend d. h. ihre Glieder wachsen von einem bestimmten ab bis ins Unendliche, sie ist folglich divergent, so oft die erste der Differenzen $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$, $A_3 - B_3$ etc., welche nicht mehr Null ist, positiv wird. — Ist dagegen dieselbe

---

*) Es ist dies z. B. der Fall, wenn unter U die Reihe

$$S\left[\frac{\alpha^{a|1} \cdot \beta^{a|1}}{a!\ \gamma^{a|1}}\right]$$

verstanden wird, während α, β, γ reell gedacht sind. Diese Reihe geht für $\alpha = 1$ über in

$$S\left[\frac{\beta^{a|1}}{\gamma^{a|1}}\right],$$

und für $\beta = \gamma = 1$, in

$$S\left[\frac{\alpha^{a|1}}{a!}\right].$$

Im erstern Falle, wo α, β, γ noch ganz beliebig reell gedacht sind, hat man nämlich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(1+\gamma)n+\gamma},$$

also wie oben vorausgesetzt, nur daß hier $h = 2$ ist.

Differenz negativ, so ist die Reihe U fallend, d. h. die Glieder nehmen von einem bestimmten Gliede an gerechnet bis ins Unendliche fortwährend ab, und es kann daher im letztern Falle allein noch untersucht werden, ob und wann die Reihe convergent ist oder nicht.

2) Ist $A_1 - B_1$ positiv, so ist die Reihe U nicht bloß steigend, sondern die Glieder werden auch zuletzt unendlich-groß. (Dies erhellet sogleich, wenn man die Reihe U mit einer andern Reihe V vergleicht, in welcher $v_r = \frac{(u_r)^k}{r}$ gedacht ist und k positiv und ganz; denn es wird dann

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{r}{r+1} \cdot \left(\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)^k = \frac{r^{kh+1} + kA_1 \cdot r^{kh} + \cdots}{r^{kh+1} + (kB_1 + 1) \cdot r^{nh} + \cdots};$$

also ist die Reihe V (nach N. 1.) ebenfalls noch bis ins Unendliche steigend, in so ferne k positiv ganz und so gewählt wird, daß $kA_1 - (kB_1 + 1)$ d. h. $k(A_1 - B_1) - 1$ positiv ist; folglich ist $r \cdot v_r$, also auch $u_r = \sqrt[k]{r \cdot v_r}$ mit r zugleich unendlich-groß).

3) Ist $A_1 - B_1$ negativ, so werden die Glieder der Reihe U zuletzt unendlich-klein. (Dies erhellet sogleich, wenn man die Reihe U mit einer andern Reihe V vergleicht, in welcher $v_r = r \cdot (u_r)^k$ ist, und k positiv ganz, indem man wie in N. 2. weiter schließt).

4) Ist $A_1 - B_1 = 0$, so nähern sich die Glieder der Reihe U, sie mögen wachsen oder abnehmen einer bestimmten endlichen Grenze und werden also zuletzt weder unendlich-groß noch unendlich-klein. (Dies erhellet, wenn man die Reihe U mit einer Reihe V vergleicht, in welcher $v_r = \left(\frac{r}{r-1}\right)^k \cdot u_r$ gedacht ist, im Falle die Reihe U steigend, — in welcher aber $v_r = \left(\frac{r-1}{r}\right)^k \cdot u_r$ gedacht wird, im Falle die Reihe U eine fallende seyn sollte; denn es wird dann im erstern Falle

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{r^{2k+h}+A_1 \cdot r^{2k+h-1}+(A_2-k) \cdot r^{2k+h-2}+ \ldots}{r^{2k+h}+B_1 \cdot r^{2k+h-1}+B_2 \cdot r^{2k+h-2}+ \ldots},$$

so daß man immer k positiv ganz und so groß nehmen kann, daß (nach N. 1.) die Reihe V fallend wird, während doch immer fort $u_r<v_r$ bleibt. — Analog im andern Falle).

5) Diese Reihe U ist endlich nur dann convergent, wenn $A_1+1<B_1$ d. h. wenn $A_1<B_1-1$, oder wenn A_1+1-B_1 oder A_1-B_1+1 noch negativ ist.

Da für A_1-B_1 positiv oder Null, die Reihe im Unendlichen nicht unendlich-kleine Glieder bekommt (nach N. 1. und N. 3.), so brauchen wir nur den Fall zu untersuchen, wo A_1-B_1 negativ, also B_1-A_1 positiv ist und entweder $\overline{\overline{<}}1$ oder >1.

Ist nun $B_1-A_1 \overline{\overline{<}} 1$, so denke man sich eine neue Reihe V, deren Glieder gegeben sind durch die Gleichung $v_r=(r-k) \cdot u_r$, so daß

$$\frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{r^{h+1}+(A_1-k+1) \cdot r^h+[A_2-A_1(k-1)] \cdot r^{h-1}+ \ldots}{r^{h+1}+(B_1-k) \cdot r^h+(B_2-B_1 k) \cdot r^{h-1}+ \ldots}$$

wird. Ist nun $B_1-A_1<1$, so sind (nach N. 1.) die Glieder von V stets wachsend; für $B_1-A_1=1$ aber kann man die als positiv ganz gedachte Zahl k stets so annehmen, daß dann die Differenz $A_2-B_2+(B_1-A_1)k+A_1$ der Koeffizienten von r^{h-1} (nachdem die Differenz der Koeffizienten von r^h jetzt Null wird) positiv ist, folglich die Reihe V (nach N. 1.) wieder eine steigende wird. Daraus folgt, daß wenn man sich $n>r$ denkt, allemal

$$\frac{v_n}{v_r}>1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{(n-k) \cdot u_n}{(r-k) \cdot u_r}>1 \quad \text{d. h.} \quad u_n>(r-k) \cdot u_r \cdot \frac{1}{n-k} \quad \text{wird.}$$

Setzt man nun in letzterer Gleichung statt n nach und nach $r+1$, $r+2$, $r+3$, in inf., und addirt man alle Resultate, so erhält man

$$u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+ \text{ in inf.}$$
$$>(r-k) \cdot u_r \cdot \left[\frac{1}{r-k+1}+\frac{1}{r-k+2}+\frac{1}{r-k+3}+ \text{ in inf.}\right].$$

Da nun die letztere Reihe (zur Rechten) als harmonische divergent, und die Summe von unendlich-vielen ihrer Glieder unendlich-groß ist, so ist dies auch mit der ersteren (zur Linken), nämlich mit der Reihe U der Fall.

Nehmen wir endlich $B_1-A_1>1$ an, so betrachte man den Quotienten

$$\frac{r \cdot u_{r+1}}{(r-1-k) \cdot u_r} = \frac{r^{h+1}+A_1 \cdot r^h+A_2 \cdot r^{h-1}+ \ldots}{r^{h+1}+(B_1-k-1) \cdot r^h+(B_2-(k+1)B_1) \cdot r^{h-1}+ \ldots};$$

und man findet, daß solcher kleiner als 1 wird von einem gewissen Werth von r an und für jeden noch größeren, so oft man k positiv aber so nimmt, daß $B_1-k-1>A_1$, also $k<B_1-A_1-1$ ist. Also hat man

$$\frac{r\cdot u_{r+1}}{(r-1-k)\cdot u_r}<1 \quad \text{d. h.} \quad u_{r+1}<\frac{r-1-k}{r}\cdot u_r.$$

Setzt man nun hier $r+1$, $r+2$, $r+3$, ... $r+\mu-1$ nach und nach statt r und multiplicirt man die entstehenden Ungleichungen mit einander und mit der ersten, so erhält man

$$u_{r+\mu}<\frac{(r-1-k)^{\mu|1}}{r^{\mu|1}}\cdot u_r.$$

Wird also jetzt noch 1, 2, 3, 4, in inf. statt μ gesetzt und addirt man alle Ungleichungen, so ergiebt sich (wenn man zuletzt auch noch u_r auf beiden Seiten addirt)

$$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+ \text{ in inf. } <u_r\cdot S\left[\frac{(r-1-k)^{b|1}}{r^{b|1}}\right].$$

Da nun die Summe von n Gliedern dieser letzteren Reihe $S\left[\frac{(r-1-k)^{b|1}}{r^{b|1}}\right]$ für $n=\infty$ in $\frac{r-1}{k}$ übergeht *), so folgt hieraus

---

*) Denkt man sich nämlich die einzelnen Glieder dieser Reihe, d. h.

$$1,\quad \frac{r-1-k}{r},\quad \frac{(r-1-k)(r-k)}{r(r+1)},\quad \frac{(r-1-k)(r-k)(r+1-k)}{r(r+1)(r+2)},\quad \text{etc.},$$

so läßt sich jedes als Differenz darstellen und so daß der Minuend jeder folgenden Differenz dem Subtrahenden der vorhergehenden gleich ist, nämlich so:

$$1=\frac{r-1}{k}-\frac{r-1-k}{k}$$

$$\frac{r-1-k}{r}=\frac{r-1-k}{k}-\frac{(r-1-k)(r-k)}{kr}$$

$$\frac{(r-1-k)(r-k)}{r(r+1)}=\frac{(r-1-k)(r-k)}{kr}-\frac{(r-1-k)(r-k)(r+1-k)}{kr(r+1)}$$

$$\frac{(r-1-k)(r-k)(r+1-k)}{r(r+1)(r+2)}=\frac{(r-1-k)(r-k)(r+1-k)}{kr(r+1)}-\frac{(r-1-k)(r-k)(r+1-k)(r+2-k)}{kr(r+1)(r+2)}$$

u. s. w.

$$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+ \text{ in inf. } < u_r \cdot \frac{r-1}{k}$$

während r endlich gedacht worden ist. Also ist die Reihe U (nach §. 24.) convergent.

Anmerkg. Nimmt man die Reihe der Binomial-Koeffizienten

$$S[m_a] \text{ d. h. } S\left[\frac{m^{a|-1}}{a!}\right] \text{ oder } S\left[(-1)^a \cdot \frac{(-m)^{a|1}}{1^{a|1}}\right]$$

statt der Reihe U oder $S[u_a]$, so ist

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = -\frac{-m+r}{1+r} = -\frac{r-m}{r+1}$$

Denken wir uns nun unter U dieselbe Reihe, aber alle Glieder positiv, so ist für ein r, welches groß genug gedacht ist, und dann für jeden noch größeren Werth von r

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{r-m}{r+1}.$$

Es ist also die Reihe der Binomial-Koeffizienten, auch wenn alle Glieder positiv gedacht werden eine der hier betrachteten Reihen, in welcher $h = 1$, $A_1 = -m$, $B_1 = 1$ ist.

Nach NN. 2. 3. wird also der Binomial-Koeffizient m_n oder

Addirt man $n+1$ dieser Gleichungen, so giebt dies

$$S\left[\frac{(r-1-k)^{b|1}}{r^{b|1}}\right]_{b+b=n} = \frac{r-1}{k} - \frac{(r-1-k)^{n+1|1}}{k \cdot r^{n|1}}$$

$$\text{d. h. } = \frac{r-1}{k} - \frac{r-1-k}{k} \cdot \frac{(r-k)^{n|1}}{r^{n|1}},$$

während der letztere Ausdruck zur Rechten für $n = \infty$ unendlich-klein wird, weil der Faktor $\frac{(r-k)^{n|1}}{r^{n|1}}$ dieses Ausdruckes für jeden Werth von n ein Glied der Reihe $S\left[\frac{\beta^{b|1}}{\gamma^{b|1}}\right]$ ist (für $\beta = r-k$ und $\gamma = r$), von welcher wir (nach der Note pag. 111.) wissen, daß sie zu den hier betrachteten Reihen gehört, während gleichzeitig die N. 3. uns lehrt, daß sie unendlich-klein werdende Glieder hat, so oft $\gamma > \beta$ ist; und dies letztere ist hier der Fall, weil hier $\gamma - \beta = k$ und k positiv ist.

$\frac{m^{n|-1}}{n!}$, abgesehen vom Vorzeichen, für $n=\infty$ unendlich-groß oder unendlich-klein, je nachdem $-(m+1)$ positiv oder negativ ist; er ist also unendlich-groß (für $n=\infty$), wenn m zwischen $-\infty$ und -1 liegt; er ist unendlich-klein (für $n=\infty$), wenn m zwischen -1 und $+\infty$ liegt.

Dieselbe Reihe der Binomial-Koeffizienten, wenn man alle Glieder positiv nimmt, bildet ferner eine convergente Reihe (nach N. 5.) nur dann, wenn $-m$ noch negativ, d. h. wenn m positiv ist.

Liegt m zwischen 0 und -1, so hat die Reihe $S[m_a]$ d. h. $S\left[\frac{m^{a|-1}}{a!}\right]$ abwechselnde Vorzeichen und immer kleiner werdende Glieder, also ist sie convergent (nach §. 26.), wenn man ihre Vorzeichen läßt; dagegen ist sie nicht mehr convergent, wenn man alle Glieder positiv nimmt.

§. 30.

Wir knüpfen hier noch eine Reihe von Bemerkungen an.

A. Allgemeine Gleichungen wie

1) $$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+ \text{ in inf.}$$

oder besser $$\frac{1}{1+x} = S[(-1)^b \cdot x^b]$$

2) $$\frac{1}{1-x} = S[x^a]$$

3) $$\sqrt{1-x^2} = \pm S\left[\frac{(-1)^{b|2}}{2^{b|2}} x^{2b}\right] = \pm 1 \mp \tfrac{1}{2} S\left[\frac{1^{b|2}}{4^{b|2}} \cdot x^{2b+2}\right]$$

4) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \pm S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot x^{2b}\right]$$

u. dgl. m. sind, obgleich die Reihen zur Rechten bis ins Unendliche fortgehen, also nie abbrechen, folglich auch nie von einem Ergänzungsgliede die Rede ist, — diese Gleichungen also sind, —

so lange x ganz allgemein, als bloßer Träger der Operationszeichen, also völlig inhaltlos gedacht wird, und die Reihen nach Potenzen von x fortschreiten — stets richtige Gleichungen, im Sinne der Definition der Gleichung. — Die Gleichung 2.) sagt also nichts weiter, als daß die unendliche Reihe rechts, wenn sie mit $1-x$ multiplicirt und das Produkt nach Potenzen von x geordnet wird, außer dem allerersten Gliede 1 lauter Nullen giebt ohne Ende fort, eben weil an kein Abbrechen gedacht wird. — Eben so sagt die Gleichung 3.) nichts weiter, als daß die Reihe zur Rechten, wenn sie mit sich selber multiplicirt und das Resultat nach Potenzen von x geordnet wird, dann außer den beiden ersten Gliedern $1-x^2$ lauter Nullen giebt, ohne Aufhören, — eben weil die Reihe selbst als irgend wo aufhörend nie gedacht wird. Die Gleichung 4. sagt dagegen, daß wenn man die unendliche Reihe zur Rechten mit sich selber multiplicirt und das Resultat nach Potenzen von x ordnet, dann eine unendliche Reihe kommt, welche dem Quotienten $\frac{1}{1-x^2}$ gleich ist, d. h. welche, wenn sie nun noch mit $1-x^2$ multiplicirt und das neue Resultat wieder geordnet wird, abermals außer dem allerersten Glied 1 nur noch ohne Ende fort lauter Nullen giebt, eben weil bei der unendlichen Reihe kein Abbrechen möglich ist.

B. Wenn in solchen allgemeinen Gleichungen (wie z. B. in A. 1.—4.) statt x irgend ein (reeller oder imaginärer Ziffern-) Werth gesetzt wird, der so ist, daß statt der unendlichen Reihen zur Rechten, bestimmte, zwischen endlichen Grenzen eingeschlossene „Werthe" gedacht werden können, so daß also beide Seiten dieser Gleichungen wirklich einen bestimmten endlichen Werth haben, — so haben auch beide Seiten nothwendig jedesmal einen und denselben (reellen oder imaginären) Werth, und die Gleichungen sind dann auch als Ziffern-Gleichungen richtige.

C. Setzt man aber statt x einen solchen Ziffern-Werth, daß die Reihen rechts divergent, oder die Ausdrücke links in der

Rechnung nicht mehr zulässig werden (wie z. B. der in 1. für $x = -1$, der in 2. für $x = +1$ und der in 4. für $x = \pm 1$), so zeigt dies allemal eine Ausnahme an d. h. es zeigt dies an, daß jetzt von einer Gleichung (in dem einen oder dem andern Sinne) nicht mehr die Rede seyn könne; dies aber ist allemal schon dadurch ausgedrückt, daß wir sagen: „divergente Reihen und Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0}$, $\log 0$, 0^0, 2c. sind in der Rechnung unzulässig."

D. Setzen wir also z. B. in den Reihen A. 1.—4. statt x einen positiven oder negativen Werth aber <1, so daß alle Reihen convergent werden, so giebt der Ausdruck zur Linken allemal denselben Werth, also bezüglich den (Summen-) „Werth" dieser unendlichen Reihen. — Setzen wir aber statt x einen positiven oder negativen Werth, der an sich >1 ist, so werden die Reihen alle divergent; sie haben nun gar keinen „Werth" und einer, der gar nicht existirt, kann natürlich dann auch mit keinem anderen verglichen werden. — In der That nehmen die Ausdrücke zur Linken (in A. 1.—4.) für $x>1$ theils positive, theils negative, theils imaginäre Werthe an, während die Reihen zur Rechten divergent sind und die Summe von n ihrer ersten Glieder für $n=\infty$ unendlich-groß oder unbestimmt (aber nie imaginär) wird.

E. So oft also eine allgemeine Reihe $S[C_a \cdot x^a]$ eine allgemeine „Summe" f_x hat (im Sinne des §. 15.), so oft ist der „Werth" derselben Reihe, wenn sie für $x = \alpha$ numerisch und convergent wird, allemal der Werth von f_x für $x = \alpha$. — Wird aber dieselbe Reihe für $x = \beta$ numerisch und divergent, so wird zwar ihre Summe d. h. ihre erzeugende Funktion f_x, für $x = \beta$ einen bestimmten Werth (in der Regel) haben, sie selbst aber ist nicht mehr im Calcul zulässig und von ihrem Werthe ist nicht mehr die Rede.

F. Namentlich findet man also auch den Werth einer numerischen und convergenten Reihe $S[C_a]$, wenn man an ihre

einzelnen Glieder noch Potenzen von x anhängt, von der dadurch entstehenden allgemeinen Reihe $S[C_a \cdot x^a]$ die allgemeine Summe d. h. die erzeugende Funktion f_x sucht, dann aber in derselben $x = 1$ nimmt.

Von diesem Verfahren haben wir in den vorangehenden Paragraphen bereits mehreremale Gebrauch gemacht, so daß es keiner neuen Beispiele bedarf.

Ueber den Begriff „Werth" einer numerischen und convergenten Reihe wollen wir aber auch noch einige Bemerkungen uns erlauben.

G. Ein irrationaler Decimalbruch d. h. ein Decimalbruch mit ganz beliebigen, aber bis ins Unendliche fortlaufenden Decimalstellen ist stets eine convergente unendliche Reihe; denn es ist derselbe eine unendliche Reihe von der Form

$$\frac{\alpha}{10}+\frac{\beta}{10^2}+\frac{\gamma}{10^3}+\frac{\delta}{10^4}+\frac{\varepsilon}{10^5}+\frac{\zeta}{10^6}+\cdots+\frac{\varrho}{10^r}+\text{ in inf.},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, 2c. 2c. beliebige der Ziffern, also jedesmal kleiner als 10 sind, und deshalb ist dieser Decimalbruch allemal größer als der endliche Decimalbruch

$$\frac{\alpha}{10}+\frac{\beta}{10^2}+\frac{\gamma}{10^3}+\cdots+\frac{\varrho}{10^r}$$

und kleiner als derselbe, wenn $\varrho+1$ statt ϱ geschrieben, d. h. wenn die letzte Decimalstelle ϱ des endlichen Decimalbruchs um eine Einheit erhöht wird, oder er kommt dem letzteren unendlich nahe *).

H. In der Einleitg. §. 3. ist die Zahl e, welche sich als

---

*) Es ist nämlich der „Werth" der unendlichen geometrischen Reihe 0,9999999999 in inf. $= px \cdot \frac{1}{1-x}$ für $p = 9$ und $x = \frac{1}{10}$ und dies wird $= 1$; folglich ist $\frac{1}{10^r}$ d. h. eine Einheit der r^{ten} Decimalstelle größer oder höchstens gleich der Summe aller nach dieser r^{ten} Decimalstelle folgenden.

die Basis der natürlichen Logarithmen ausweist, definirt durch die Gleichung

1) $e = S\left[\frac{1}{a!}\right]$ d. h. $e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+$ in inf.

Verwandeln wir nun die einzelnen gebrochenen Glieder dieser Reihe (dadurch, daß wir das erste $\frac{1}{2!}$ oder 0,5 durch 3, das nun entstehende durch 4, das jetzige durch 5 u. s. w. f. dividiren) in neue unendliche Reihen, die nach Potenzen von $\frac{1}{10}$ fortschreiten, d. h. in (irrationale) Decimalbrüche, so können wir die unendlichmal unendlich vielen Glieder anders ordnen, und man verwandelt so die unendliche Reihe e in eine neue convergente unendliche Reihe, nämlich

2) $e = 2,718281$ in inf.,

die zwar den Nachtheil hat, daß wir das Gesetz nicht angeben können, nach welcher die Glieder fortgehen, die dagegen wiederum den Vortheil hat, daß wo man sie abbricht, sogleich zwei Grenzen vorhanden sind, zwischen denen der wahre Werth der Reihe liegt, während der letztere selbst eben nur durch $S\left[\frac{1}{a!}\right]$ ausgedrückt werden kann. — In der letztern Form ist nun die unendliche Reihe e (im Sinne der Einleitg. §. 9) „ausgerechnet" und diese „ausgerechnete" Form nennt man nun ihren „Werth".

Ganz das Gleiche gilt, wenn etwa von dem „Werthe" des *Sinus* oder des *Cosinus* irgend eines gegebenen Argumentes (Bogens) z. B. 0,13 die Rede ist. Nach der Definition von *Sin* x und *Cos* x sind *Sin* x und *Cos* x bestimmte gegebene, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihen; der „Werth" von *Sin* x oder *Cos* x für $x = 0,13$ ist also nichts anderes als der Werth der unendlichen numerischen und convergenten Reihe

$$S\left[(-1)^{b}\cdot\frac{x^{2b+1}}{(2b+1)!}\right] \quad \text{oder} \quad S\left[(-1)^{b}\cdot\frac{x^{2b}}{(2b)!}\right] \text{ für } x = 0,13$$

d. h. die neue unendliche nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{10}$ fortlaufende Reihe, welche man Decimalbruch nennt, und welche der ursprünglichen unendlichen Reihe, die man sich unter $Sin(0{,}13)$ oder $Cos(0{,}13)$ zu denken hatte, gleich ist *).

J. Genau genommen ist also der „Werth" einer unendlichen numerischen und convergenten Reihe nichts weiter als eine neue Form, welche man zuletzt durch Umformung derselben Reihe erhält und welche man im Sinne der Einleitung §. 9. die „ausgerechnete" nennt, — wenn man eben nicht die numerische und convergente unendliche Reihe in ihrer ursprünglichen Form selbst zugleich auch als ihren Werth ansehen will.

Endliche Grenzen, zwischen denen ein solcher Werth liegt, bilden nun die Näherungs-Werthe, deren größere oder geringere Genauigkeit (bei der Anwendung der Analysis zur Vergleichung der Größen) von dem Unterschiede jener Grenzwerthe selbst abhängt.

§. 31.

Obgleich es sich von selbst versteht, daß eine unendliche Reihe eben nur dann völlig bestimmt und gegeben ist, wenn man das Gesetz kennt, nach welchem die Glieder derselben bis ins Unendliche fortschreiten, so wollen wir dies hier am Schlusse des Kapitels doch noch an einem bestimmten Beispiele nachweisen.

Es ist bekanntlich der Werth der unendlichen Reihe

$$1) \qquad S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1}\right], \; = log\,2,$$

weil solche aus der allgemeinen Reihe

---

*) In den Anwendungen der Analysis auf Geometrie (d. h. in einer Anwendung der Integralrechnung auf die Kurvenlehre, also auch auf die Kreislinie) wird erkannt, daß diese ausgerechneten Werthe von $Sin(0,13)$ oder $Cos(0,13)$ allemal die Längen gewisser, von dem Bogen 0,13 abhängiger gerader Linien in dem Kreise sind, dessen Radius $=1$ ist.

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}\right] = log(1+x)$$

für $x = 1$ hervorgeht. — Suchen wir nun den Werth dieser andern unendlichen Reihe

$$2)\quad S\left[\frac{1}{2a+1}\right]_{a+b=m-1} - S\left[\frac{1}{2a+2}\right]_{a+b=n-1} + S\left[\frac{1}{2a+2m+1}\right]_{a+b=m-1}$$
$$- S\left[\frac{1}{2a+2n+2}\right]_{a+b=n-1} + S\left[\frac{1}{2a+4m+1}\right]_{a+b=m-1} - S\left[\frac{1}{2a+4n+2}\right]_{a+b=n-1}$$
$$+ S\left[\frac{1}{2a+6m+1}\right]_{a+b=m-1} - \text{in inf.},$$

von der wir hier 7 Glieder hergesetzt haben, während diese einzelnen Glieder abwechselnd Summen von m und von n Gliedern sind, so daß diese Reihe 2.) entsteht, wenn man die Glieder der Reihe 1.) dergestalt zusammenfaßt, daß die ersten m der addirten Glieder der Reihe 1.) vorangehen, dann die ersten n der subtrahirten Glieder derselben Reihe 1.) folgen, hierauf wieder die nächsten m der addirten Glieder dieser Reihe 1.) kommen, um wieder von den nächsten n der subtrahirten Glieder derselben Reihe 1.) gefolgt zu werden, und so bis ins Unendliche fort.

Um die Methode des §. 20. anwenden zu können, versehen wir die einzelnen Glieder der gegebenen numerischen Reihe 2.) mit solchen Potenzen von x, daß wenn man die dadurch entstehende allgemeine Reihe differenziirt, dann jedes der Glieder eine geometrische und eben deshalb leicht summirbare Reihe von respektive m und n Gliedern wird. Wir betrachten also die Reihe

$$3)\quad S\left[\frac{x^{(2a+1)n}}{2a+1}\right]_{a+b=m-1} - S\left[\frac{x^{(2a+2)m}}{2a+2}\right]_{a+b=n-1} + S\left[\frac{x^{(2a+2m+1)n}}{2a+2m+1}\right]_{a+b=m-1}$$
$$- S\left[\frac{x^{(2a+2n+2)m}}{2a+2n+2}\right]_{a+b=n-1} + S\left[\frac{x^{(2a+4m+1)n}}{2a+4m+1}\right]_{a+b=m-1} - \text{in inf.} = f_x,$$

welche für $x = 1$ in die gegebene Reihe 2.) übergeht.

Wir differenziiren nun diese Reihe nach x und erhalten

$$4)\quad nx^{n-1}.S\left[\underset{a+b=m-1}{x^{2an}}\right]-mx^{2m-1}.S\left[\underset{a+b=n-1}{x^{2am}}\right]$$
$$+nx^{2mn+n-1}.S\left[\underset{a+b=m-1}{x^{2an}}\right]-mx^{2mn+2m-1}.S\left[\underset{a+b=n-1}{x^{2am}}\right]$$
$$+nx^{4mn+n-1}.S\left[\underset{a+b=m-1}{x^{2an}}\right]-\text{ in inf.} = \partial f_x.$$

Die in diesen einzelnen Gliedern noch vorkommenden (endlichen) Reihen $S[x^{2an}]$ und $S[x^{2am}]$ von bezüglich m und n Gliedern sind nun geometrische Reihen und geben sogleich, wenn man sie summirt, bezüglich

$$\frac{1-x^{2mn}}{1-x^{2n}} \quad \text{und} \quad \frac{1-x^{2mn}}{1-x^{2m}},$$

so daß die Gleichung 4.) übergeht in

$$5)\quad \left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^{2n}}-\frac{mx^{2m-1}}{1-x^{2m}}\right)$$
$$(1-x^{2mn})(1+x^{2mn}+x^{4mn}+x^{6mn}+\text{ in inf.}) = \partial f_x$$

d. h. in

$$6)\quad \frac{nx^{n-1}}{1-x^{2n}}-\frac{mx^{2m-1}}{1-x^{2m}} = \partial f_x,$$

in so ferne das Produkt der beiden letztern Faktoren in 5.), da die Reihe zur Rechten eine unendliche ist, nichts als die Einheit giebt. Aus der 6.) folgt nun die gesuchte Summe f_x der allgemeinen unendlichen Reihe 3.) augenblicklich, nämlich

$$7)\quad f_x = n\int_{x\div 0}\frac{x^{n-1}}{1-x^{2n}}.dx-m\int_{x\div 0}\frac{x^{2m-1}}{1-x^{2m}}.dx,$$

in so ferne $f_x = 0$ werden muß, für $x = 0$.

Zerlegt man den erstern dieser Brüche in seine beiden Partialbrüche nämlich in $\frac{1}{2}\frac{x^{n-1}}{1-x^n}+\frac{1}{2}\frac{x^{n-1}}{1+x^n}$, so erhält man durch Integration sofort diese Summe

$$8)\quad f_x = \frac{1}{2}\log(1+x^n)+\frac{1}{2}\log\frac{1-x^{2m}}{1-x^n}.$$

Setzt man nun hier $x = 1$, so hat man, da $\frac{1-x^{2m}}{1-x^n}$ für $x = 1$ in $\frac{2m}{n}$ übergeht*), den gesuchten „Werth" der Reihe 2.),

$$9) \cdots \qquad = \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{m}{n},$$

während der Werth der aus denselben Gliedern

$$1, \ -\frac{1}{2}, \ +\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{4}, \ +\frac{1}{5}, \ -\frac{1}{6}, \ +\frac{1}{7}, \ -\frac{1}{8}, \ +\frac{1}{9}, \ -\frac{1}{10}, \ \text{2c. 2c.}$$

bestehenden Reihe 1.), in welcher gleich viele der addirten Glieder von gleich vielen der subtrahirten Glieder gefolgt werden, ein anderer, nämlich $\log 2$ ist. — Und in der That geht der Werth 9.) auch in den Werth 1.) über, so oft man $m = n$ nimmt.

Die Gleichung 9.) giebt in den besonderen Fällen, wo $m = 2$ und $n = 1$, oder wo $m = 1$ und $n = 2$ ist, die nachstehenden Resultate, nämlich

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)$$
$$-\frac{1}{8}+ \text{ in inf. } = \log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{3}{2}\cdot \log 2$$

und

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)$$
$$+\frac{1}{7}-\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{16}\right)+ \text{ in inf. } = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Anmerkg. Die Gleichungen 1.) und 9.) schreiben sich am deutlichsten so:

---

*) Man differenzirt, um den $\frac{0}{0}$ Werth zu bestimmen, Zähler und Nenner nach x und setzt dann wieder $x = 1$.

1) $S\left[\frac{1}{2a+1}\right]_{a+b=\nu-1} - S\left[\frac{1}{2a+2}\right]_{a+b=\nu-1}$ für $\nu=\infty$ und ganz ist $= log\, 2$;

9) $S\left[\frac{1}{2a+1}\right]_{a+b=m\nu-1} - S\left[\frac{1}{2a+2}\right]_{a+b=n\nu-1}$ für $\nu=\infty$ und ganz ist $= log\, 2 + \frac{1}{2} log \frac{m}{n}$;

d. h. die Gleichung 1.) lehrt: die Differenz der beiden Reihen zur Linken, wo jede gleich viel und ν Glieder hat, nähert sich desto mehr dem $log\, 2$, je größer die ganze positive Zahl ν der Glieder gedacht wird; — die Gleichung 9.) dagegen lehrt, daß die Differenz derselben beiden Reihen, aber unter der Voraussetzung, daß man von der ersteren $m\nu$ und von der anderen $n\nu$ Glieder nimmt, desto mehr dem Werthe $log\, 2 + \frac{1}{2} log \frac{m}{n}$ sich nähert, je größer ν (positiv ganz) genommen wird, und daß jene Differenzen den gedachten bezüglichen Werthen auch unendlich nahe kommen können (nur daß nach und nach, je größer ν gedacht wird, auch der Minuend und Subtrahend immer fort wachsen und zuletzt unendlich-groß werden).

§. 32.

Die in den §§. 19. u. 20. beschriebene Methode der Summation allgemeiner, nach Potenzen von x fortlaufender Reihen, läßt sich auch auf die „Auswerthung" solcher Reihen anwenden, welche, weil sie nicht mehr nach Potenzen eines Fortschreitungs-Buchstaben fortlaufen, nur unter der Voraussetzung ausgewerthet werden können, daß die Reihen, wenn unendliche, auch convergente sind.

Wir wollen dies an einem Beispiel ausführlicher und um so lieber nachweisen, als dies uns Gelegenheit giebt, auf die Vorsicht aufmerksam zu machen, welche bei der Bestimmung der

durch Integration eingehenden Konstanten beobachtet werden muß, wenn nicht unrichtige Resultate hervorgehen sollen.

Es werde also der „Werth" S_z der allemal convergenten unendlichen Reihe

$$1)\quad Cos\, z - \frac{1}{3^3} Cos\, 3z + \frac{1}{5^3} Cos\, 5z - \frac{1}{7^3} Cos\, 7z + \text{ in inf. } (= S_z)$$

gesucht. — Man erhält durch fortgesetztes Differenziiren (nach z)

$$2)\quad -\partial S_z = Sin\, z - \frac{1}{3^2} Sin\, 3z + \frac{1}{5^2} Sin\, 5z - \frac{1}{7^2} Sin\, 7z + \text{ in inf.}$$

$$3)\quad -\partial^2 S_z = Cos\, z - \frac{1}{3} Cos\, 3z + \frac{1}{5} Cos\, 5z - \frac{1}{7} Cos\, 7z + \text{ in inf.}$$

Man muß nun diese letztere Reihe unter der Voraussetzung, daß sie convergent ist, „auswerthen" und dann durch Integration aus diesem $\partial^2 S_z$ zuerst ∂S_z und dann durch neue Integration auch S_z selbst zu erhalten suchen.

Zu Erreichung des erstern Zweckes versehen wir die unendliche Reihe in 3. zur Rechten mit den entsprechenden Potenzen von x, und summiren also zunächst die allgemeine Reihe

$$x \cdot Cos\, z - \frac{1}{3} x^3 \cdot Cos\, 3z + \frac{1}{5} x^5 \cdot Cos\, 5z - \frac{1}{7} x^7 \cdot Cos\, 7z + \text{ in inf.}$$

und man findet solche nach dem Verfahren des §. 18. und mit Zuziehung des erstern Beispiels zu §. 17.

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Tg}(x \cdot e^{z \cdot i}) + \frac{1}{Tg}(x \cdot e^{-z \cdot i})\right].$$

Weil aber nach den Elementen der analytischen Trigonometrie

$$\frac{1}{Tg} a + \frac{1}{Tg} b = \frac{1}{Tg} \frac{a+b}{1-ab}$$

gefunden wird, so läßt sich diese Summe einfacher ausdrücken, so daß sich findet

$$4)\quad x \cdot Cos\, z - \frac{1}{3} x^3 \cdot Cos\, 3z + \frac{1}{5} x^5 \cdot Cos\, 5z - \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2x \cdot Cos\, z}{1-x^2}.$$

Setzt man nun hier 1 statt x, so findet sich unter der Voraussetzung der Convergenz der Reihe und so lange nicht $Cos\,z = 0$ d. h. $z = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ ist, wo n Null oder positiv oder negativ ganz gedacht wird,

$$5)\quad Cos\,z - \frac{1}{3}\cdot Cos\,3z + \frac{1}{5}\cdot Cos\,5z - \frac{1}{7}\cdot Cos\,7z + \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{1}{0} \text{ d. h. } = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Cos}\,0 = \frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

wo ν entweder 0 oder eine positive oder eine negative ganze Zahl ist, welche nun noch näher bestimmt werden muß. Weil aber diese Gleichung aufhört wahr zu seyn, für $z = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ꝛc. so wie auch für $z = -\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{5}{2}\pi$, ꝛc. ꝛc., so kann das Gesetz der Stetigkeit nach jeder solchen Unterbrechung derselben, sich auch ändern, und deshalb kann die ganze Zahl ν für diese verschiedenen Abtheilungen der Werthe von z, jedesmal eine andere seyn.

Da nun für $z = 0$ diese Reihe zur Linken den Werth $\frac{1}{4}\pi$ annimmt*), so folgt, daß für $z = 0$ auch $\nu = 0$ genommen werden muß, und da ν keine Funktion von z seyn kann, so muß ν denselben Werth 0 behalten, auch für alle übrigen Werthe von z, welche auf beiden Seiten der Null stetig anliegen, bis zu denjenigen Werthen $\pm\frac{1}{2}\pi$ von z hin, für welche die Gleichung 5.) zum ersten Male überhaupt nicht mehr statt findet. Man findet also

*) Leibnitz schon hat

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{ in inf.} = \frac{1}{4}\pi$$

gefunden, weshalb man diese Reihe die Leibnitz'sche nennt.

6) $Cos\,z - \frac{1}{3}\cdot Cos\,3z + \frac{1}{5}\cdot Cos\,5z - \frac{1}{7}\cdot Cos\,7z + \text{in inf.} = \frac{1}{4}\pi$

für jeden Werth von z, welcher zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Nimmt man aber $z = 2\mu\pi$, wo μ positiv oder negativ ganz ist oder Null, so geht die Reihe zur Linken in 4.) abermals in $\frac{1}{4}\pi$ über, so daß abermals $\nu = 0$ ist. Folglich bleibt $\nu = 0$ für alle Werthe von z, welche zwischen $\left(2\mu - \frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi$ liegen. — So wie jedoch $z = (2\mu+1)\pi$ gesetzt wird, so geht die Reihe zur Linken in 4.) in $-\frac{1}{4}\pi$ über, folglich muß man nun $\nu = -1$ nehmen, und dieser Werth ν muß nun beibehalten werden für jeden Werth von z welcher zwischen $\left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu + \frac{3}{2}\right)\pi$ liegt.

Man hat also nun gefunden (unter der Voraussetzung, daß die Reihe zur Linken convergent ist) *)

I. $Cos\,z - \frac{1}{3}Cos\,3z + \frac{1}{5}Cos\,5z - \cdots = \pm\frac{1}{4}\pi,$

wo das (+) Zeichen gilt, so oft z zwischen $\left(2\mu - \frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi$ liegt, während das (—) Zeichen genommen werden muß, wenn z zwischen $\left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu + \frac{3}{2}\right)\pi$ liegen sollte, während μ entweder Null oder jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

---

*) Ob und daß diese unendliche Reihe zu den convergenten gehört, wird am besten im nächsten IX. Theil d. W. bei der Betrachtung der sogenannten Fourier'schen Reihen nachgewiesen.

Integrirt man nun diese Gleichung I. nach z, so erhält man

7) $Sin\,z - \frac{1}{3^2}Sin\,3z + \frac{1}{5^2}Sin\,5z -$ in inf. $= \pm\frac{1}{4}\pi\cdot z + C,$

wo C einen noch zu bestimmenden Werth hat, der keine Funktion von z (nach z constant) ist. — Setzt man aber hier statt z entweder $2\mu\pi$ oder $(2\mu+1)\pi$, so wird die Reihe in 7.) zur Linken doch immer $= 0$; also hat man zur Bestimmung der Konstante C die Gleichungen

$$0 = \frac{1}{4}\pi\cdot 2\mu\pi + C \quad \text{oder} \quad 0 = -\frac{1}{4}\pi\cdot(2\mu+1)\pi + C$$

d. h.

$$C = -\frac{1}{2}\mu\pi^2 \qquad \text{oder} \quad C = +\frac{2\mu+1}{4}\pi^2;$$

folglich ist

$$\text{II.} \quad Sin\,z - \frac{1}{3^2}Sin\,3z + \frac{1}{5^2}Sin\,5z - \cdots = \left\{\begin{matrix} +\frac{1}{4}\pi\cdot[z-2\mu\pi] \\ -\frac{1}{4}\pi\cdot[z-(2\mu+1)\pi] \end{matrix}\right\},$$

wo das obere Resultat gilt, so oft z zwischen $\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\pi$ liegt, das untere dagegen, so oft z zwischen $\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu+\frac{3}{2}\right)\pi$ liegen sollte *).

Integrirt man jetzt diese Gleichung noch einmal (nach z), so findet sich weiter, wenn man links und rechts noch mit -1 multiplicirt,

---

*) Besieht man sich dieses Resultat II. näher, so findet man, daß die Reihe zur Linken immer denselben Werth behält, für $z = y$ und für $z = 2\mu\pi + y$, weil die einzelnen Glieder derselben für diese beiden Werthe von z stets einerlei Werth haben. So erklärt sich's, warum in dem obern Ausdruck zur Rechten $z-2\mu\pi$ eingehen muß; in so ferne nämlich $z-2\mu\pi$ stets ein und dasselbe y wird, wie groß oder klein auch μ genommen werden mag. — Analoges läßt sich von dem untern Ausdruck zur Rechten sagen.

8) $Cos\,z - \frac{1}{3^3}Cos\,3z + \frac{1}{5^3}Cos\,5z -$ in inf.

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8}\pi z[z-4\mu\pi]+C \\ +\frac{1}{8}\pi z[z-(4\mu+2)\pi]+C \end{Bmatrix}.$$

Setzt man nun wiederum $z = 2\mu\pi$, so geht die Reihe links in die der reciproken dritten Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen über, welche wir (in der Note zum 1ten Beispiel zu §. 14.) bereits $= \frac{1}{32}\pi^3$ gefunden haben. Für $z = (2\mu+1)\pi$ findet sich dagegen links dieselbe Reihe mit entgegengesetztem Vorzeichen. Man hat also zur Bestimmung von C

oben $\frac{1}{32}\pi^3 = -\frac{1}{4}\pi \cdot \mu\pi \cdot (-2\mu\pi)+C$,

$$\text{also}\quad C = \left(-4\mu^2+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{8}\pi^2,$$

unten $-\frac{1}{32}\pi^3 = -\frac{1}{8}\pi(2\mu+1)^2\pi^2+C$,

$$\text{also}\quad C = \left[(2\mu+1)^2-\frac{1}{4}\right]\cdot\frac{1}{8}\pi^3.$$

Diese Werthe in die 8.) substituirt, geben nun

III. $Cos\,z - \frac{1}{3^3}Cos\,3z + \frac{1}{5^3}Cos\,5z - \frac{1}{7^3}Cos\,7z +$ in inf.

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{8}\pi\cdot\left[z\left(4\mu\pi-z\right)-\left(4\mu^2-\frac{1}{4}\right)\pi^2\right] \\ -\frac{1}{8}\pi\cdot\left[z\left((4\mu+2)\pi-z\right)-\left((2\mu+1)^2-\frac{1}{4}\right)\pi^2\right] \end{Bmatrix},$$

wo der obere Werth gilt für alle Werthe von z, welche zwischen $\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\pi$ liegen, während die untere Form die wahre ist, so oft z zwischen $\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu+\frac{3}{2}\right)\pi$ liegt.

Will man bloß Resultate, welche wahr sind, für alle Werthe von z, die zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, so setzt man $\mu = 0$ (in I.—III.) und nimmt die oberen Resultate, und man hat dann

I. 1. $\quad Cos\, z - \frac{1}{3} Cos\, 3z + \frac{1}{5} Cos\, 5z -$ in inf. $= \frac{1}{4}\pi;$

II. 1. $\quad Sin\, z - \frac{1}{3^2} Sin\, 3z + \frac{1}{5^2} Sin\, 5z -$ in inf. $= \frac{1}{4}\pi z;$

III. 1. $\quad Cos\, z - \frac{1}{3^3} Cos\, 3z + \frac{1}{5^3} Cos\, 5z -$ in inf.

$$= \frac{1}{8}\pi\left(\frac{1}{4}\pi^2 - z^2\right);$$

u. s. w. f.

Wir fügen noch folgende Bemerkungen hinzu: Als wir in der Gleichung 8.) zur Bestimmung der Konstante C, statt z den Werth $2\mu\pi$ setzten, erhielten wir links eine Reihe der reciproken Potenzen, deren Werth bekannt seyn mußte, wenn man die Konstante C ohne Weiteres bestimmen wollte.

Wäre der Werth dieser Reihe nicht bekannt gewesen, so mußte man zur Bestimmung der Konstante C, nicht $z = 2\mu\pi$ setzen, sondern statt z einen andern der zwischen $\left(2\mu - \frac{1}{2}\right)\pi$ und $\left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi$ liegenden Werthe nehmen, etwa $z = \left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - k$, wo k positiv aber beliebig klein gedacht wird. Dann gehen $Cos\, z$, $Cos\, 3z$, $Cos\, 5z$, $Cos\, 7z$, ꝛc. ꝛc. bezüglich in $Sin\, k$, $-Sin\, 3k$, $Sin\, 5k$, $-Sin\, 7k$, ꝛc. ꝛc. über, so daß die Glieder der entstehenden Reihe der Null sich desto mehr nähern, je kleiner k gedacht wird. Es wird also nun die Reihe zur Linken für diesen Werth von z desto näher der Null gleich, je kleiner k gedacht wird *), während der (obere) Ausdruck zur Rechten desto näher

*) Es werden zwar die vielfachen Bogen $(2n+1)k$, einen endlichen

$$= -\frac{1}{8}\pi \cdot \left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi\left(-2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi + C$$

wird, je kleiner man k sich denkt. Also hat man zur Bestimmung der Konstante C die Gleichung

$$0 = \frac{1}{8}\left(4\mu^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \pi^2 + C$$

woraus sich C gerade so findet, wie wir solches oben gefunden haben. — Um die untere Konstante C in 8.) zu finden, kann man $z = \left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\pi + k$ nehmen und eben so schließen.

Man begreift übrigens, daß weil man diese nach dem Cosinus der vielfachen Bogen fortlaufenden Reihen, welche für $z = 0$ in die Reihen der reciproken Potenzen übergehen, auswerthen kann, ohne die Summen der letztern vorher nöthig zu haben, aus den Werthen der erstern auch die der letztern Reihen wieder gefunden werden kann.

§. 33.

Ist

$$1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \text{ in inf.} = a$$

eine numerische und convergente Reihe und ihr „Werth" = a, und potenzirt man die Basis e der natürlichen Logarithmen mit den gleichen Ausdrücken rechts und links, so erhält man, sobald $e^{u_r} = v_r$, also $u_r = \log v_r$ gedacht wird für jeden Zeiger r,

$$2) \qquad v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot v_5 \cdot \text{ in inf.} = e^a$$

und so sieht man ein Produkt von unendlich-vielen Faktoren, welches, je mehr man Faktoren nimmt, desto mehr dem bestimmten Werthe e^a sich nähert und zuletzt unendlich nahe kommt.

Werth annehmen, wenn n unendlich-groß ist, so daß man nun $Sin(2n+1)k$ nicht mehr als unendlich-klein ansehen kann; dagegen sind dieselben Glieder durch $(2n+1)^3$ dividirt, und deshalb rückt doch der Werth der Reihe mit k zugleich der Null unendlich nahe.

Wäre die Reihe in 1.) eine divergente gewesen, so würde das Produkt in 2.) keinen bestimmten Werth haben.

Wir nennen daher ein Produkt

$$v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot v_4 \cdot \text{ in inf. oder } P[v_a]$$

von unendlich-vielen Faktoren, convergent oder divergent, je nachdem die unendliche Reihe

$$log\, v_0 + log\, v_1 + log\, v_2 + log\, v_3 + \text{ in inf. oder } S[log\, v_a]$$

eine convergente oder divergente ist.

Ein solches Produkt von unendlich-vielen Faktoren kann aber auch ein allgemeines seyn, wie z. B. in der Einleitg. §. 13., nämlich

$$\text{I.} \quad Sin\, x = x \cdot P\left[1 - \frac{x^2}{(a+1)^2\pi^2}\right]$$

und

$$\text{II.} \quad Cos\, x = P\left[1 - \frac{4x^2}{(2a+1)^2\pi^2}\right],$$

und dann wird es weder convergent noch divergent genannt werden können.

Die beiden vorliegenden Produkte sind übrigens (nach der vorstehenden Definition) für jeden reellen und imaginären Werth von x von der Form $p+q \cdot i$, allemal convergent.

Uebrigens versteht es sich von selbst, daß man ein Produkt von unendlich-vielen Faktoren nicht als bestimmt gegeben ansehen, daher auch nicht nach dessem Werth fragen kann, so lange nicht das Gesetz, nach welchem die Faktoren fortschreiten, bis ins Unendliche bestimmt und gegeben ist *).

---

*) Man findet den Ausdruck von Wallis gewöhnlich so geschrieben:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \text{ in inf.}}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \text{ in inf.}};$$

er ist aber eigentlich so zu schreiben

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \text{ in inf.},$$

während er am besten so geschrieben wird

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2^{\nu|2} \cdot 2^{\nu|2}}{1^{\nu|2} \cdot 3^{\nu|2}} \quad \text{für} \quad \nu = \infty \quad \text{und positiv ganz;}$$

d. h. der Ausdruck zur Rechten nähert sich dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ desto mehr, je größer ν positiv ganz genommen wird und kommt zuletzt demselben Werthe $\frac{1}{2}\pi$ unendlich nahe.

Zweite Abhandlung.

Von den Differenzen- und Summen-Reihen,

so wie

von der Rechnung mit endlichen Differenzen
und Summen.

Viertes Kapitel.

Erste Abtheilung.

Von den Differenzen- und Summen-Reihen.

Vorerinnerung.

Subtrahirt man in einer arithmetischen Reihe je zwei auf einander folgende Glieder von einander, so erhält man lauter gleiche Differenzen.

Thut man dasselbe bei der Reihe der Quadratzahlen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ⋯,

so erhält man eine arithmetische Reihe

3, 5, 7, 9, 11, 13, ⋯

in welcher erst wieder die Differenzen der Glieder einander gleich und $=2$ werden.

Thut man dasselbe bei der Reihe der Kubikzahlen

A. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ⋯

so erhält man die Reihe

B. 7, 19, 37, 61, 91, 127, ⋯,

welche auf dieselbe Weise behandelt zu der arithmetischen Reihe

C. 12, 18, 24, 30, 36, ⋯

führt, in welcher die Differenzen der Glieder einander gleich werden.

Umgekehrt: hat man diese Bemerkung für die Kubikzahlen gemacht, so kann man sich derselben bedienen, um die Reihe der Kubikzahlen bequemer fortzusetzen, als dies durch das direkte

Kubiren geschieht, dadurch nämlich, daß man zuerst die Reihe C., daraus die Reihe B. sich bildet, indem man zu jedem bereits gefundenen Gliede von B. das eben so vielte Glied von C. addirt; endlich aber aus der Reihe B. wiederum die Reihe A. gerade so construirt, wie aus C. die B. construirt worden ist.

Diese Bemerkung und die auf sie gegründete Hoffnung, Tabellen bequemer als auf direktem Wege construiren zu können, war nun die Veranlassung, daß man solche zusammengehörige Reihen einer nähern Betrachtung unterzogen hat, wie wir jetzt ausführlicher zeigen wollen.

§. 34.

Denkt man sich eine Ur-Reihe

$$\ldots,\ u_{r-2},\ u_{r-1},\ u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ u_{r+3},\ \ldots$$

von ganz beliebigen Buchstaben- oder Ziffern-Ausdrücken und daraus nach und nach neue Reihen gebildet, dadurch, daß man in dieser wie in jeder folgenden Reihe, jedes Glied von dem nächstfolgenden Gliede subtrahirt, so bezeichnen wir die Glieder dieser neuen Reihen durch

I. $\ldots,\ \Delta u_{r-2},\ \Delta u_{r-1},\ \Delta u_r,\ \Delta u_{r+1},\ \Delta u_{r+2},\ \ldots$

II. $\ldots,\ \Delta^2 u_{r-2},\ \Delta^2 u_{r-1},\ \Delta^2 u_r,\ \Delta^2 u_{r+1},\ \Delta^2 u_{r+2},\ \ldots$

III. $\ldots,\ \Delta^3 u_{r-2},\ \Delta^3 u_{r-1},\ \Delta^3 u_r,\ \Delta^3 u_{r+1},\ \ldots$

u. s. w. f. und wir nennen diese neuen Reihen bezüglich die 1te, 2te, 3te, 2c. Differenz-Reihe von der Ur-Reihe. — Nimmt man also die I. als Ur-Reihe, so sind die II. und III. deren erste und zweite Differenz-Reihe. Und denkt man sich die II. als Ur-Reihe, so ist die III. deren erste Differenz-Reihe.

Nach dieser Definition sind also die Zeichen Δu_s, $\Delta^2 u_s$, $\Delta^3 u_s$, 2c. für jeden Zeiger s erklärt durch die Gleichungen

1) $\Delta u_s = u_{s+1} - u_s$ oder $u_{s+1} = u_s + \Delta u_s$

2) $\Delta^2 u_s = \Delta u_{s+1} - \Delta u_s$ oder $\Delta u_{s+1} = \Delta u_s + \Delta^2 u_s$

3) $\Delta^3 u_s = \Delta^2 u_{s+1} - \Delta^2 u_s$ oder $\Delta^2 u_{s+1} = \Delta^2 u_s + \Delta^3 u_s$,

und allgemein

(⊙)*. $\Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$ oder $\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1} u_s$ *),

wo statt s jeder beliebige Zeiger, und statt p jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann, ja selbst die Null, wenn man nur unter $\Delta^0 u_s$ das Glied u_s selbst, so wie unter $\Delta^1 u_s$ bloß Δu_s versteht.

§. 35.

Man kann sich auch die Reihen im §. 34. aufwärts erweitert denken, indem man oberhalb der Ur-Reihe und über einander neue Reihen setzt, so gebildet, daß jede dieser neuen Reihen, nebst der Ur-Reihe als die erste Differenz-Reihe der zunächst über ihr stehenden Reihe angesehen werden kann. Bezeichnet man diese neuen Reihen dadurch, daß man den Gliedern der Ur-Reihe noch Δ^{-1}, Δ^{-2}, Δ^{-3}, ꝛc. ꝛc. vorsetzt und nennt man diese neuen Reihen bezüglich die 1te, 2te, 3te ꝛc. Summen-Reihe der Ur-Reihe (oder die (−1)te, (−2)te, (−3)te ꝛc. ꝛc. Differenz-Reihe der Ur-Reihe), so lassen sich diese Reihen alle in folgendem Schema übersehen, nämlich:

(−3)te D. R.	…	$\Delta^{-3}u_{r-1}$,	$\Delta^{-3}u_r$,	$\Delta^{-3}u_{r+1}$,	$\Delta^{-3}u_{r+2}$,	…
(−2)te D. R.	…	$\Delta^{-2}u_{r-1}$,	$\Delta^{-2}u_r$,	$\Delta^{-2}u_{r+1}$,	$\Delta^{-2}u_{r+2}$,	…
(−1)te D. R.	…	$\Delta^{-1}u_{r-1}$,	$\Delta^{-1}u_r$,	$\Delta^{-1}u_{r+1}$,	$\Delta^{-1}u_{r+2}$,	…
Ur-Reihe	…	u_{r-1},	u_r,	u_{r+1},	u_{r+2},	…
1te D. R.	…	Δu_{r-1},	Δu_r,	Δu_{r+1},	Δu_{r+2},	…
2te D. R.	…	$\Delta^2 u_{r-1}$,	$\Delta^2 u_r$,	$\Delta^2 u_{r+1}$,	$\Delta^2 u_{r+2}$,	…

u. s. w. f.,

---

*) Diese Gleichungen lassen sehen, daß Δu_s der Zuwachs ist, den u_s erleidet, um zum nächsten Gliede u_{s+1} überzugehen, während $\Delta^{p+1}u_s$ der Zuwachs ist, den das Glied $\Delta^p u_s$ erleiden muß, um zum nächsten Gliede $\Delta^p u_{s+1}$ derselben Reihe überzugehen.

wo in jeder nach unten folgenden Reihe jedes Glied die Differenz zweier Glieder der nächst darüber stehenden Reihe ist, z. B.

$$\varDelta^{-2}u_{r+1} = \varDelta^{-3}u_{r+2} - \varDelta^{-3}u_{r+1},$$

also daß die Gleichung (♂) des vorhergehenden §. 34., nämlich

$$(♂) \quad 1) \qquad \varDelta^{p+1}u_s = \varDelta^p u_{s+1} - \varDelta^p u_s$$

nicht bloß für jeden Zeiger s, sondern auch noch für jede negative wie positive ganze Zahl gilt, welche statt p gesetzt werden mag, und noch für $p = 0$.

Dieselbe Gleichung kann man auch noch in den nachstehenden beiden andern Formen schreiben, nämlich

$$2) \qquad \varDelta^p u_{s+1} = \varDelta^p u_s + \varDelta^{p+1}u_s$$

und

$$3) \qquad \varDelta^p u_s = \varDelta^p u_{s+1} - \varDelta^{p+1}u_s.$$

§. 36.

Es ist aber dabei noch zu bemerken:

1) Von jeder Summen-Reihe kann und muß das erste Glied beliebig angenommen werden.

2) Um also bis zur q^{ten} Summen-Reihe zu gelangen, muß man die ersten Glieder der 1ten, 2ten, 3ten, ... q^{ten} Summen-Reihe sich geben lassen oder beliebig annehmen, oder dafür lieber die q ersten Glieder der q^{ten} Summen-Reihe beliebig annehmen, in so ferne man aus letzteren die Differenz-Reihen sich bilden kann, welche bezüglich die $(q-1)^{te}$, $(q-2)^{te}$, $(q-3)^{te}$, ... 2te, 1te Summen-Reihe seyn werden, so daß man zuletzt von allen q Summen-Reihen wiederum die ersten Glieder hat. Diese q ersten Glieder der q^{ten} Summen-Reihe, welche willkührlich, also in den Anwendungen so gewählt werden können, daß noch einer Anzahl q von Nebenbedingungen genügt wird, nennt man wohl auch „die in „die q^{te} Summen-Reihe eingehenden q willkührlichen „Konstanten."

3) Setzt man in der Gleichung (♂. 1.) statt s nach und

nach $r+1$, $r+2$, ... $r+n$, und addirt man alle Resultate, so erhält man

$$\Delta^{p+1}u_{r+1}+\Delta^{p+1}u_{r+2}+\Delta^{p+1}u_{r+3}+\cdots+\Delta^{p+1}u_{r+n} = \Delta^{p}u_{r+n+1}-\Delta^{p}u_{r+1}$$

d. h. in jeder Reihe ist die Summe von n auf einander folgenden Gliedern, vom $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, — dem $(r+n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ihrer ersten Summen=Reihe gleich (d. h. der im Schema zunächst über ihr stehenden Reihe), wenn man davon das $(r+1)^{\text{te}}$ Glied derselben (Summen=) Reihe subtrahirt.

§. 37.

Aus den unendlich vielen Gleichungen, welche aus jeder der drei Gleichungen ♂. 1, ♂. 2, ♂. 3. des §. 35. dadurch hervorgehen, daß man statt (p und) s nach und nach alle positiven oder negativen ganzen Zahlen und die Null setzt, und dann im erstern Fall alle Glieder der Differenz=Reihen eliminirt, in den beiden andern Fällen aber alle Glieder der Ur=Reihe, ergeben sich sogleich die drei Haupt=Resultate, nämlich (aus der ♂. 1.)

1) $$\Delta^{n}u_{r} = S[(-1)^{a}\cdot n_{a}\cdot u_{r+n-a}];$$

dann (aus der ♂. 2.)

2) $$u_{r+n} = S[n_{a}\cdot\Delta^{a}u_{r}];$$

endlich (aus der ♂. 3.)

3) $$u_{r-n} = S[(-1)^{a}\cdot n_{a}\cdot\Delta^{a}u_{r-a}],$$

wo überall n_a den a^{ten} Binomial=Koeffizienten vorstellt von der n^{ten} Potenz eines Binomiums $\left(\text{so daß } n_a = \frac{n^{a|-1}}{a!} \text{ ist}\right)$ und wo die Reihen zur Rechten alle endlich sind und aus $n+1$ Gliedern bestehen, in so ferne wir uns n hier positiv ganz gedacht haben*).

*) Man findet diese Resultate erst für $n=2$, $n=3$, ꝛc. ꝛc. stellt sie dann allgemein so hin, wie hier geschehen, und beweist zuletzt, daß jedes derselben noch für die Zahl $n+1$ gilt, so oft es für irgend eine bestimmte Zahl n wahr ist. — Es ist nämlich z. B.

Die Gleichung 1.) lehrt aber wie ein Glied der n^{ten} Differenz-Reihe in n auf einander folgende Glieder der Ur-Reihe ausgedrückt wird.

Die Gleichung 2.) lehrt das $r+n^{te}$ Glied der Ur-Reihe finden, wenn von jeder ihrer n auf einander folgenden Differenz-Reihen das r^{te} Glied bekannt und gegeben ist.

Die Gleichung 3.) endlich lehrt wie das vom r^{ten} Gliede um n Glieder rückwärts gelegene Glied der Ur-Reihe, in das r^{te} Glied derselben Ur-Reihe und in die bezüglich um 1, 2, 3, 4, ... n Stellen rückwärts gelegenen Glieder der bezüglich

1ten, 2ten, 3ten, 4ten ... n^{ten} Differenz-Reihe

ausgedrückt werden kann.

Zu gleicher Zeit mag man dabei nicht übersehen, daß jede Reihe als Ur-Reihe genommen werden kann, und daß, wenn $\Delta^p u_s$ für die verschiedenen Zeiger s die Glieder der Ur-Reihe vorstellt, wo p positiv oder negativ seyn kann, dann $\Delta^{p+\mu} u_s$

---

a) $\Delta^{n+1} u_r = \Delta^n u_{r+1} - \Delta^n u_r$,

also wenn die 1.) für diese gewisse bestimmte Zahl n wahr ist (aus a.)

b) $\Delta^{n+1} u_r = S[(-1)^a n_a \cdot u_{r+1+n-a}] - S[(-1)^a n_a \cdot u_{r+n-a}]$

Sondert man aber hier zur Rechten von der ersten Reihe das allererste Glied ab (indem man $a=0$ nimmt, dann aber $a+1$ statt a setzt) und denkt man daran, daß $(-1)^{a+1} = -(-1)^a$ und $n_{a+1}+n_a = (n+1)_{a+1}$ ist, so erhält man aus vorstehender Gleichung sogleich

c) $\Delta^{n+1} u_r = u_{r+1+n} + S[(-1)^{a+1}(n+1)_{a+1} \cdot u_{r+n-a}]$.

Fügt man jetzt zu der Reihe zur Rechten noch ein allererstes Glied hinzu (dadurch, daß man $a-1$ statt a setzt) und untersucht man, welches dieses neu hinzugefügte Glied ist (dadurch, daß man in dem zuletzt gewonnenen allgemeinen Gliede der Reihe, 0 statt a schreibt), so findet sich, daß dies eben das in 3.) voranstehende Glied ist. Man erhält also

d) $\Delta^{n+1} u_r = S[(-1)^a (n+1)_a \cdot u_{r+n+1-a}]$

und dies ist die obige Gleichung 1.) wieder, nur $n+1$ statt n gesetzt. — Ganz analog verfährt man mit den beiden andern Sätzen.

die Glieder der zugehörigen μ^{ten} Differenz-Reihe bedeuten. Die Gleichungen 1.—3. können daher auch noch so geschrieben werden, nämlich

4) $\Delta^{p+n}u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^p u_{r+n-a}]$,

5) $\Delta^p u_{r+n} = S[n_a \cdot \Delta^{p+a} u_r]$,

6) $\Delta^p u_{r-n} = S[(-1)^a n_a \cdot \Delta^{p+a} u_{r-a}]$,

wenn nur n (wie in 1.—3.) positiv ganz (oder Null) gedacht ist.

Anmerkg. 1. Die Gleichungen 1.) und 2.) findet man häufig auch so geschrieben, nämlich

1) $\Delta^n u_r = (u_1 - 1)^n \cdot u_r$

und 2) $u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot u_r$,

indem man sich vorbehält, diese n^{ten} Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln, in den Entwickelungen aber u_1, u_r, u_t als Potenzen anzusehen, in welchen die Zeiger die Exponenten sind (also daß z. B. statt $(u_1)^{n-a}$ geschrieben wird u_{n-a}, und u_{t+r} statt $u_t \cdot u_r$, u. s. w.), ferner statt mit u_r zu multipliciren, dieses u_r nur formell an 1, Δ, Δ^2, Δ^3, Δ^4, 2c. und zwar hinten anzuhängen. — Die Gleichung 3.) endlich läßt sich auch so schreiben

3) $u_{r-n} = (1 - \Delta u_{-1})^n \cdot u_r$,

wenn man nur sich vorbehält, diese n^{te} Potenz nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln, dann aber statt $(\Delta u_{-1})^a$ zunächst $\Delta^a (u_{-1})^a$, dann $\Delta^a u_{-a}$ zu schreiben, d. h. Δu_{-1} als ein Produkt aus Δ und u_{-1}, dagegen u_{-1} als eine Potenz zu behandeln und deren Zeiger -1 als Exponent anzusehen, — wenn man endlich das Multipliciren der Glieder $\Delta^a u_{-a}$ mit u_r so ausführt, daß $u_{-a} \cdot u_r$ in u_{r-a}, also $\Delta^a u_{-a} \cdot u_r$ in $\Delta^a u_{r-a}$ übergeht, d. h. also, wenn man die kurz vorher bei den N.N. 1. und 2. gegebenen Regeln beobachtet.

Anmerkg. 2. Da die Gleichungen §. 35. ♂ 1.—3. für jeden Werth von s und für jeden Werth von p gelten, welcher

positiv oder negativ ganz oder 0 ist, so kann man in jedem ihrer Glieder die Zeiger von Δ und die von u um beliebig viel (nur um gleichviel) vermehren oder vermindern und man hat noch immer richtige Gleichungen. Dieses Vermehren oder Vermindern geschieht aber, wenn man eine solche Gleichung mit $\Delta^{\mu}u_{\nu}$ dergestalt der Form nach multiplicirt oder dividirt, daß man statt $\Delta^{\mu}u_{\nu}\cdot\Delta^{p}u_{s}$ und $\Delta^{p}u_{s}:\Delta^{\mu}u_{\nu}$ schreibt bezüglich $\Delta^{p+\mu}u_{s+\nu}$ und $\Delta^{p-\mu}u_{s-\nu}$, das nämlich, was man erhalten würde, wenn man Δ^{μ}, Δ^{p}, eben so u_{ν}, u_{s} als Potenzen ansähe und behandelte (nur daß im letztern Falle d. h. bei u_{ν}, u_{s} die Exponenten unten zu suchen wären). Unter dieser Voraussetzung kann man z. B. die Gleichung ♂. 1. §. 35. auch so schreiben

$$\Delta^{p+1}u_{s} = (u_{1}-u_{0})\cdot\Delta^{p}u_{s}$$

Setzt man daher hier nach und nach 0, 1, 2, 3, ⋯ n−1 statt p, so kann man die zu Anfang des §. 37. verlangte Elimination von Δu_{s}, $\Delta^{2}u_{s}$, $\Delta^{3}u_{s}$, ⋯ $\Delta^{n-1}u_{s}$ offenbar am bequemsten dadurch bewerkstelligen, daß man die entstehenden Gleichungen der Form nach alle mit einander multiplicirt und auf beiden Seiten durch Δu_{s}, $\Delta^{2}u_{s}$, ꝛc. $\Delta^{n-1}u_{s}$ dividirt. So erhält man augenblicklich

$$1)\qquad \Delta^{n}u_{s} = (u_{1}-u_{0})^{n}\cdot u_{s}\,{}^{*}),$$

wenn man nur die Potenz in Multiplikation auflöst, das Multipliciren der Form nach aber in dem vorbemerkten Sinne ausführt. Dies giebt aber gerade das Resultat 1.) des §. 37.

Eben so kann man die Gleichungen ♂. 2. und ♂. 3. des §. 35., indem man 0 statt p setzt und in der letztern noch s−1 statt s, so schreiben

*) Es würde ganz auf ein und dasselbe hinauslaufen, wenn man

$$\Delta^{p+1}u_{s} = (u_{1}-1)\cdot\Delta^{p}u_{s},$$

und

$$\Delta^{n}u_{s} = (u_{1}-1)^{n}\cdot u_{s}$$

schreiben wollte. Die obige Schreibweise greift jedoch in das Wesen der Sache mehr noch ein.

$u_{s+1} = (1+\Delta)\cdot u_s$ und $u_{s-1} = (1-\Delta u_{-1})\cdot u_s$.

Setzt man nun hier nach und nach r, r±1, r±2, r±3, ... r±(n−1) statt s, indem man das (+) Zeichen bei der erstern, das (−) Zeichen bei der andern Gleichung gebraucht, — multiplicirt man alle entstehenden Gleichungen der Form nach mit einander und dividirt man dann auf beiden Seiten durch $u_{r\pm 1}\cdot u_{r\pm 2}\cdot u_{r\pm 3}\cdot$ ꝛc. ꝛc., so erhält man

2) $u_{r+n} = (1+\Delta)^n\cdot u_r$ und 3) $u_{r-n} = (1-\Delta u_{-1})^n\cdot u_r$

und so hat man auch die Gleichungen 2.) u. 3.) des §. 37. am schnellsten gefunden *).

§. 38.

Obgleich diese Gleichungen §. 37. 1.—3. und 4.—6. nur erwiesen sind für den Fall, daß n positiv ganz (oder Null) gedacht wird, so ergiebt doch eine nähere Untersuchung, daß sie auch noch beibehalten werden können, wenn n negativ ganz gedacht wird, sobald nur die Reihen zur Rechten, die jetzt unendliche sind, convergent vorausgesetzt werden, oder (was einer allgemeinen Rechnung entsprechend ist) sobald man, wenn man sie bei irgend einem m^{ten} Gliede abbrechen läßt, noch das Ergänzungsglied hinzufügt. — Um aber die richtigen Formeln am bequemsten zu finden, gehe man von der Auffassungsweise der vorstehenden Anmerkg. 2. zu §. 37. aus und verfahre wie folgt:

A. Man multiplicire der Form nach die Gleichung 1. des §. 37., nämlich

1) $\Delta^n u_r = S[(-1)^a n_a\cdot u_{r+n-a}]$

nach und nach mit allen m Gliedern der Reihe

---

*) Statt der Gleichung 2. könnte man auch noch schreiben $u_{r+n} = (\Delta^0+\Delta^1)^n\cdot u_r$ und statt der Gleichung 3) auch noch $u_{r-n} = (\Delta^0 u_0-\Delta^1 u_{-1})^n\cdot u_r$.

$$S\left[(-1)^c(-n)_c \cdot u_{-n-c}\right]_{c+b=m-1}$$

und addire alle Resultate; dann erhält man

$$2)\quad S\left[(-1)^c(-n)_c \cdot \Delta^n u_{r-n-c}\right]_{c+b=m-1} = S\left[(-1)^{a+c} n_a \cdot (-n)_c \cdot u_{r-(a+c)}\right]_{c+b=m-1}.$$

Ordnet man die Doppel-Reihe zur Rechten so, daß man $a+c=e$ nimmt, dann zuerst statt e nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen setzt, so findet sich u_r als das allererste Glied (für $e=0$); für jeden der übrigen Werthe von e, nämlich für $e=1, 2, 3, \ldots m-1$ ist die Summe aller zugehörigen Glieder jedesmal Null, weil nach einer bekannten Eigenschaft der Binomial-Koeffizienten allemal

$$S\left[n_a \cdot (-n)_c\right]_{a+c=\mu} = 0$$

ist, welche ganze positive Zahl man auch statt μ setzen mag. Endlich wenn man $e>m-1$ nimmt, also für alle übrigen Werthe von e, — welche durch $m+f$ ausgedrückt werden können, — wird die Summe der zugehörigen Glieder deshalb nicht mehr Null, weil c durch die Gleichung $c+b=m-1$ dergestalt beschränkt ist, daß c nicht mehr alle Werthe erhalten kann, welche der Gleichung $a+c=e$ oder $a+c=m+f$ genügen. Die Gleichung 2.) läßt sich also auch so schreiben:

$$3)\quad S\left[(-1)^c(-n)_c \cdot \Delta^n u_{r-n-c}\right]_{c+b=m-1}$$

$$= u_r + S\left[(-1)^{m+f} n_a \cdot (-n)_c \cdot u_{r-m-f}\right]_{a+c=m+f,\; c+b=m-1}$$

und dies ist, wenn man noch links und rechts (der Form nach) mit Δ^{-n} multiplicirt (d. h. die n^{te} Summen-Reihe als neue Ur-Reihe nimmt) die verlangte Formel, nämlich abermals die 1. des §. 37. aber $-n$ statt n gesetzt, und nur mit m Gliedern der Reihe nebst noch dem Ergänzungsgliede, welches selbst wieder aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, da (rechts) n der größte Werth von a ist (in so ferne $n_a=0$ wird für $a>n$) und $m-1$ der größte Werth von c, also $m-1+n$

der größte Werth von $a+c$ d. h. von $m+f$ ist, so daß $n-1$ als der größte Werth von f sich ausweist, weshalb man die Gleichung $f+g=n-1$ noch darunter setzen kann. Setzt man noch überdies überall $m-1-d$ statt c, so wird die Gleichung $c+d=m-1$ überflüssig, während die Gleichung $a+c=m+f$ dann in $a=f+d+1$ übergeht; das Resultat schreibt sich dann so (wenn noch mit Δ^{-n} multiplicirt worden ist)

4) $$\Delta^{-n}u_r = S\left[(-1)^c(-n)_c\cdot u_{r-n-c}\right]_{c+d=m-1}$$
$$-S\left[(-1)^{m+f}n_{f+d+1}\cdot(-n)_{m-1-d}\,\Delta^{-n}u_{r-m-f}\right]_{f+g=n-1,\quad f+d+h=n-1}$$

in so ferne rechts $n_{f+d+1}=0$ wird, so oft $f+d+1>n$, d. h. $f+d>n-1$ ist, also $n-1$ auch der größte Werth von $f+d$ ist, so daß, während für f irgend einer seiner Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ gesetzt worden ist, gleichzeitig statt d nach und nach $0, 1, 2, 3,$ bis $n-1-f$ gesetzt werden muß.

Verbindet man damit noch die Eigenschaft der Binomial-Koeffizienten, nach welcher

$$(-1)^c(-n)_c = (-1)^c\frac{(-n)^{c|-1}}{c!} = \frac{n^{c|1}}{c!} = \frac{(n+c-1)^{c|-1}}{c}$$
$$= (n+c-1)_c = (n+c-1)_{n-1}$$

und

$$(-n)_{m-1-d} = \frac{(-n)^{m-1-d|-1}}{(m-1-d)!} = (-1)^{m-1-d}\cdot\frac{n^{m-1-d|1}}{(m-1-d)!}$$
$$= (-1)^{m-1-d}\cdot\frac{(n+m-2-d)^{m-1-d|-1}}{(m-1-d)!}$$
$$= (-1)^{m-1-d}\cdot(n+m-2-d)_{m-1-d} = (-1)^{m-1-d}\cdot(n+m-2-d)_{n-1}$$

ist, so geht die 4.) über in

I. ... $$\Delta^{-n}u_r = S\left[\frac{n^{c|1}}{c!}\cdot u_{r-n-c}\right]_{c+d=m-1}$$
$$+S\left[(-1)^{f+d}n_{f+d+1}\cdot(n+m-2-d)_{n-1}\cdot\Delta^{-n}u_{r-m-f}\right]_{f+g=n-1,\quad f+d+h=n-1} \text{*)}.$$

*) Es kommt eigentlich im ersten Faktor des 2ten Aggregats $(-1)^{2m+f-1-d}$

B. Um die andere Gleichung zu erhalten, multiplicire man die Gleichung 2.) des §. 37., nämlich

$$2)\qquad u_{r+n} = S[n_a \cdot \Delta^a u_r],$$

welche zur Rechten $n+1$ Glieder hat, nach und nach (der Form nach) mit den einzelnen Gliedern der aus m Gliedern bestehenden Reihe

$$S\left[\underset{c+b=m-1}{(-n)_c \cdot \Delta^c}\right]$$

[wo $(-n)_c$ den c^{ten} Binomial-Koeffizienten $\frac{(-n)^{c|-1}}{c!}$ der $(-n)^{ten}$ Potenz eines Binomiums vorstellt] und addire alle entstehenden Gleichungen. Dies giebt

$$3)\qquad S\left[\underset{c+b=m-1}{(-n)_c \cdot \Delta^c u_{r+n}}\right] = S\left[\underset{c+b=m-1}{n_a \cdot (-n)_c \cdot \Delta^{a+c} u_r}\right].$$

Ordnet man nun die Reihe rechts, welches eine Doppel-Reihe ist, so, daß man $a+c=e$ setzt und dann $0, 1, 2, 3,$ 2c. statt e schreibt, so ist das allererste Glied (für $e=0$) wiederum u_r, und die übrigen Glieder (für $e = 1, 2, 3, \ldots m-1$) werden wiederum der Null gleich. Dadurch geht die Gleichung 3.) über in

$$4)\qquad S\left[\underset{c+b=m-1}{(-n)_c \cdot \Delta^c u_{r+n}}\right] = u_r + S\left[\underset{c+b=m-1,\ a+c=m+f}{n_a \cdot (-n)_c \cdot \Delta^{m+f} u_r}\right]$$

wo, da n der größte Werth von a, und $m-1$ der größte Werth von c ist, der Buchstabe f nur die n Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ annimmt, so daß man die Gleichung $f+g=n-1$ noch darunter setzen kann. Setzt man nun hier herein noch $r-n$ statt r, so hat man u_{r-n} in u_r, Δu_r, $\Delta^2 u_r$ 2c. 2c. ausgedrückt, d. h. man hat die Gleichung 2. des §. 37. wieder, nur $-n$ statt n gesetzt, und statt der unendlich-vielen Glieder zunächst nur m Glieder und dann noch eine endliche Anzahl von

---

zu stehen; weil aber $(-1)^{2m} = +1$, und $(-1)^{2b} = +1$ ist, so ist solcher Faktor auch $= (-1)^{f+b-1}$, auch $= (-1)^{f+b+1}$, auch $= -(-1)^{f+b}$.

Gliedern, welche zusammen das Ergänzungs-Glied ausmachen. Man findet also (wenn man noch überall $m-1-d$ statt c schreibt) und die Binomial-Koeffizienten wie oben schon geschehen, umformt,

$$\text{II.}\quad u_{r-n} = S\left[\underset{c+d\,=\,m-1}{(-1)^c \cdot \frac{n^{c|1}}{c!} \cdot \Delta^c u_r}\right]$$
$$+S\left[(-1)^{m-d} \cdot \underset{f+g\,=\,n-1,}{n_{f+d+1}} \cdot \underset{f+d+h\,=\,n-1}{(n+m-2-d)_{n-1}} \cdot \Delta^{m+f} u_{r-n}\right]$$

welche Gleichung in ihrem ersten Theile genau die Formel 2. des §. 37. ist, nur $-n$ statt n gesetzt, während jedoch nur m Glieder genommen und dann noch eine zweite endliche Reihe von Gliedern hinzukommt, welche das Ergänzungsglied bildet.

Nimmt man die 3te Gleichung des §. 37. und multiplicirt man sie der Form nach mit den m Gliedern von

$$S\left[\underset{c+d\,=\,m-1}{(-1)^c(-n)_c \cdot \Delta^c u_{-c}}\right]$$

so erhält man

$$S\left[(-1)^c(-n)_c \cdot \Delta^c u_{r-n-c}\right] = S\left[\underset{c+d\,=\,m-1}{(-1)^{a+c} n_a (-n)_c \cdot \Delta^{a+c} u_{r-a-c}}\right]$$
$$= u_r + S\left[(-1)^{m+f} \cdot \underset{f+g\,=\,n-1,}{n_{f+d+1}} \cdot \underset{f+d+h\,=\,n-1}{(-n)_{m-1-d}} \cdot \Delta^{m+f} u_{r-m-f}\right]$$

oder, wenn man hier noch $r+n$ statt r schreibt und die Binomial-Koeffizienten wie oben umformt,

$$\text{III.}\quad u_{r+n} = S\left[\underset{c+d\,=\,m-1}{\frac{n^{c|1}}{c!} \cdot \Delta^c u_{r-c}}\right]$$
$$+S\left[(-1)^{f+d} \cdot \underset{f+g\,=\,n-1,}{n_{f+d+1}} \cdot \underset{f+d+h\,=\,n-1}{(n+m-2-d)_{n-1}} \cdot \Delta^{m+f} u_{r+n-m-f}\right],$$

welches genau wieder die Gleichung 3. des §. 37. ist, nur $-n$ statt n gesetzt, während jedoch rechts nur m Glieder genommen sind und dann noch die zweite endliche Reihe (deren Gliederzahl von m unabhängig ist) als Ergänzungsglied hinzukommen muß.

Anmerkg. 1. Es gelten also sonach die 3. Gleichungen

der Anmerkg. 2. zu §. 37. auch noch, wenn man $-n$ statt n setzt, nämlich

$$1) \qquad \Delta^{-n}u_r = (u_1-u_0)^{-n}\cdot u_r,$$

$$2) \qquad u_{r-n} = (1+\Delta)^{-n}\cdot u_r,$$

$$3) \qquad u_{r+n} = (1-\Delta u_{-1})^{-n}\cdot u_r,$$

wenn man erstlich die Potenzen rechts entwickelt nach dem binomischen Lehrsatze, dann die Glieder der Entwickelung mit u_r nach Anmerkg. 2. zu §. 37. der Form nach multiplicirt, jedoch von der Entwickelung nur eine, zwar beliebige aber bestimmte Anzahl m von Gliedern nimmt, zuletzt aber noch das in I., II. oder III. des §. 38. stehende Ergänzungsglied hinzufügt.

Für $n=1$ liefern die 3. Gleichungen I.—III. die nachstehenden Resultate, nämlich (aus der I.)

$$a) \qquad \Delta^{-1}u_r = (u_{r-1}+u_{r-2}+u_{r-3}+\cdots+u_{r-m})+\Delta^{-1}u_{r-m};$$

dann aus der II.

$$b) \qquad u_{r-1} = (u_r-\Delta u_r+\Delta^2u_r-\cdots+(-1)^{m-1}\Delta^{m-1}u_r) +(-1)^m\cdot\Delta^m u_{r-1};$$

endlich aus der III.

$$c) \qquad u_{r+1} = (u_r+\Delta u_{r-1}+\Delta^2u_{r-2}+\cdots+\Delta^{m-1}u_{r-(m-1)}) +\Delta^m u_{r-(m-1)}.$$

Die Gleichung a.) ist dieselbe, welche wir bereits §. 36. N. 3. gefunden haben, wenn man daselbst -1 statt p, ferner m statt n, endlich $r-m-1$ statt r setzt, und welche die Veranlassung ist, daß jede im Schema des §. 35. darüber stehende Reihe die Summen-Reihe der nächst darunter stehenden Reihe genannt worden ist.

Für $n=2$ erhält man aus denselben Gleichungen I.—III. die folgenden Resultate, nämlich (aus der I.)

$$d) \qquad \Delta^{-2}u_r = (u_{r-2}+2u_{r-3}+3u_{r-4}+\cdots+m\cdot u_{r-m-1}) +[(m+1)\cdot\Delta^{-2}u_{r-m}-m\cdot\Delta^{-2}u_{r-m-1}];$$

ferner (aus der II.)

e) $u_{r-2} = (u_r - 2\Delta u_r + 3\Delta^2 u_r - 4\Delta^3 u_r + \cdots - (-1)^m \cdot m \cdot \Delta^{m-1} u_r)$
$+(-1)^m[(m+1)\cdot\Delta^m u_{r-2} + m\cdot\Delta^{m+1} u_{r-2}]$;

endlich (aus der III.)

f) $u_{r+2} = (u_r + 2\Delta u_{r-1} + 3\Delta^2 u_{r-2} + 4\Delta^3 u_{r-3} + \cdots$
$+ m\Delta^{m-1} u_{r-(m-1)}) + [(m+1)\cdot\Delta^m u_{r+2-m} - m\cdot\Delta^{m+1} u_{r+1-m}]$,

wo wir das jedesmalige Ergänzungs-Glied durch die eckigen Klammern ausgezeichnet haben *).

Anmerkg. 2. Daß man die vorstehenden Gleichungen I.—III. der Form nach auch noch mit Δ^p oder mit u_q oder mit $\Delta^p u_q$ multipliciren könne, versteht sich von selbst. Multiplicirt man die III. namentlich mit $\Delta^n u_{-n}$, so erhält man eine Formel, welche man auch in dem Traité etc. etc. T. III. pag. 56. des Lacroix findet, während sie hier jedoch durch das hinzutretende Ergänzungs-Glied eine unentbehrliche Korrektion erhält. Da unser Gang allein diese Ergänzungs-Glieder, ohne welche die (früher aufgestellten) Formeln ganz illusorisch sind, giebt, so möchten wir diese Gelegenheit wahrnehmen, um die Leser auf die im IIten Theile dieses Werkes bereits aufgestellte „Theorie der Aggregate", durch welche unsere gegenwärtige Untersuchung abermals eben so einfach als bequem sich hat durchführen lassen, noch einmal aufmerksam zu machen.

§. 39.

Bezeichnet man die Glieder der Ur-Reihe statt durch
u_{r-2}, u_{r-1}, u_r, u_{r+1}, 2c. 2c. lieber durch

$u_{r-2\mu}$, $u_{r-\mu}$, u_r, $u_{r+\mu}$, 2c. 2c.,

so sehen die 3 Gleichungen des §. 37. natürlich dann so aus

---

*) Diese zu den Formeln I.—III. gehörigen Ergänzungs-Glieder sind bis jetzt von Niemandem mitgetheilt worden. Indem wir sie hier abdrucken lassen, erfüllen wir das pag. 358. des 2ten Bandes des „Lehrbuchs der gesammten höhern Mathemat." Berlin 1839. gegebene Versprechen.

1) $\Delta^n u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot u_{r+(n-a)\mu}] = (u_\mu - u_0)^n \cdot u_r$

2) $u_{r+n\mu} = S[n_a \cdot \Delta^a u_r] = (1+\Delta)^n \cdot u_r$

3) $u_{r-n\mu} = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^a u_{r-a\mu}] = (1-\Delta u_{-\mu})^{-n} \cdot u_r$,

während die drei Gleichungen des §. 38. dann so geschrieben werden müssen:

I. $\Delta^{-n} u_r = (u_\mu - u_0)^{-n} \cdot u_r$

II. $u_{r-n\mu} = (1+\Delta)^{-n} \cdot u_r$

III. $u_{r+n\mu} = (1-\Delta u_{-m})^{-n} \cdot u_r$,

wenn man nur nicht vergißt, daß in den drei letztern Formeln, sobald die Reihen zur Rechten bei irgend einem m^{ten} Gliede abgebrochen werden, dann noch die Ergänzungs-Glieder hinzutreten müssen, welche im §. 38. stehen, nur daß hier überall $u_{r\pm q\mu}$ gesetzt werden muß, wo dort $u_{r\pm q}$ steht, während q jede beliebige ganze Zahl vorstellt.

§. 40.

Betrachtet man aber zwei Ur-Reihen zugleich, nämlich die Reihen

$$\cdots\; u_{r-2},\; u_{r-1},\; u_r,\; u_{r+1},\; u_{r+2},\; u_{r+3},\; \cdots$$

und $\cdots\; u_{r-\mu},\; u_r,\; u_{r+\mu},\; u_{r+2\mu},\; \cdots$,

wo μ eine positive ganze Zahl ist und wo die Glieder der letztern Reihe zugleich auch Glieder der erstern sind, so nämlich, daß zwischen je zwei Gliedern der letztern Reihe eine Anzahl von $\mu-1$ Gliedern der erstern Reihe liegen, so ist es leicht, die Glieder der zur letztern Ur-Reihe gehörigen Differenz-Reihen, welche wir hier durch Δ' bezeichnen wollen, in die Glieder der zur erstern Ur-Reihe gehörigen Differenz-Reihen, für welche wir die Δ beibehalten wollen, auszudrücken.

Es ist nämlich (nach §. 39. N. 1.)

1) $\Delta'^n u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot u_{r+(n-a)\mu}]$;

aber nach §. 37. N. 2. ist, für jeden einzelnen Werth von a,

2) $u_{r+(n-a)\mu} = S[((n-a)\mu)_b \cdot \Delta^b u_r]$.

Substituirt man also dies in die vorige Gleichung, so wird erhalten

3) $\Delta'^n u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot ((n-a)\mu)_b \cdot \Delta^b u_r]$,

wo statt b gesetzt werden muß $0, 1, 2, 3, \cdots n\mu$, und wo für jeden Werth von b wiederum statt a gesetzt werden muß $0, 1, 2, 3$ und alle ganzen Zahlen, die nicht die Zahl n übersteigen, so daß jeder Koeffizient von $\Delta^b u_r$ selber wieder eine Summe von n Gliedern ist.

In dieser Gleichung 3.) sind die ersten n Glieder bis zu dem mit $\Delta^{n-1}u_r$ behafteten Gliede der Null gleich, und das nächstfolgende Glied ist $= \mu^n \cdot \Delta^n u_r$ und dies giebt Veranlassung zu der unten stehenden Gleichung 5.). — Man sieht dies am Kürzesten auf folgende Weise:

Man kann nämlich auch das Gesetz, nach welchem sich diese Koeffizienten zur Rechten in 3.) richten, nach Anmerkg. 2. zu §. 37. symbolisch ausdrücken; man hat nämlich (nach §. 39. N. 1.)

$$\Delta'^n u_r = (u_\mu - u_0)^n \cdot u_r;$$

aber (nach §. 37. N. 2.)

$$u_\mu = (1+\Delta)^\mu \cdot u_0;$$

folglich, wenn man letzteres in die erstere substituirt,

4) $\Delta'^n u_r = [(1+\Delta)^\mu u_0 - u_0]^n \cdot u_r = [(1+\Delta)^\mu - 1]^n \cdot u_r$
$= (\mu_1 + \mu_2 \cdot \Delta + \mu_3 \cdot \Delta^2 + \cdots + \mu_\mu \cdot \Delta^{\mu-1})^n \cdot \Delta^n u_r$,

wenn nur n positiv ganz gedacht wird. Und in der That, wenn man den Ausdruck

$$\mu_1 + \mu_2 \cdot \Delta + \mu_3 \cdot \Delta^2 + \cdots + \mu_\mu \cdot \Delta^{\mu-1} \quad \text{oder} \quad \frac{(1+\Delta)^\mu - 1}{\Delta}$$

oder $\Delta^{-1} \cdot [(1+\Delta)^\mu - 1]$ zur n^{ten} Potenz erhebt, so erhält man

$$\Delta^{-n} \cdot [(1+\Delta)^\mu - 1]^n \quad \text{oder} \quad \Delta^{-n} \cdot S[n_a \cdot (1+\Delta)^{(n-a)\mu}(-1)^a],$$

während nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+\Delta)^{(n-a)\mu} = S[((n-a)\mu)_b \cdot \Delta^b]$$

ist, für jeden einzelnen bestimmten Werth von a; so daß, wenn man diese Gleichung in die vorige substituirt, sich ergiebt:

$$\Delta^{-n} \cdot [(1+\Delta)^{\mu}-1]^{n} = S[(-1)^{a} \cdot n_{a} \cdot ((n-a)\mu)_{b} \cdot \Delta^{b}] \cdot \Delta^{-n}.$$

Man hat also in dem Symbol der Formel 4.) genau die Gleichung 3.) wieder, sobald man durch dieses Symbol ausdrücken will die n^{te} Potenz der Reihe $\mu_1+\mu_2\Delta+\mu_3\Delta^2+\cdots+\Delta^{\mu-1}$ nach Potenzen von Δ geordnet und dann der Form nach mit $\Delta^{n}u_{r}$ multiplicirt. Nun sieht man aber, daß die Reihe rechts (in C) mit dem Gliede $\mu^{n} \cdot \Delta^{n}u_{r}$ beginnt und die folgenden Glieder derselben nach und nach die Faktoren $\Delta^{n+1}u_{r}$, $\Delta^{n+2}u_{r}$, 2c. 2c. bis zu $\Delta^{\mu n}u_{r}$ enthalten; also folgt noch:

$$5) \qquad S\left[(-1)^{a} \cdot n_{a} \cdot \Big((n-a)\mu\Big)_{\nu}\right] = \begin{matrix} 0 \\ \mu^{n} \end{matrix}\Bigg\} \quad \text{für} \quad \Bigg\{\begin{matrix} \nu < n \\ \nu = n \end{matrix}$$

und

$$6) \qquad \Delta'^{n}u_{r} = S\left[(-1)^{a} \cdot n_{a} \cdot ((n-a)\mu)_{n+b} \cdot \Delta^{n+b}u_{r}\right],$$

und daß eben der N. 5. wegen, in der Formel 3.) sogleich $n+b$ statt n gesetzt werden kann, was wir zuletzt (in 6.) gethan haben.

Anmerkung. Dieselbe Gleichung gilt für einen negativen ganzen Werth von n nicht mehr, obgleich sie frühere Schriftsteller und namentlich auch Laplace als gültig aufgestellt haben.

§. 41.

Denkt man sich in der zweiten Ur-Reihe des §. 40. $\frac{1}{\nu}$ statt μ gesetzt, wo ν eine positive ganze Zahl ist, so daß das ν^{te}, $(2\nu)^{te}$, $(3\nu)^{te}$, 2c. 2c. Glied der 2ten Ur-Reihe mit dem 1ten, 2ten, 3ten 2c. 2c. Gliede der 1ten Ur-Reihe zusammenfallen, die 2te Ur-Reihe also zwischen je zwei nächst auf einander folgenden Gliedern der ersten Ur-Reihe $\nu-1$ Glieder eingeschaltet enthält, so bleibt die Gleichung 3.) also auch die Gleichung 6.) des §. 40 noch immer wahr, so lange die Gleichung 2.) wahr ist, d. h. wenn wir die Einschaltung nach dem Gesetz

$$(\odot)\cdots\quad u_{r+\frac{c}{\nu}} = (1+\Delta)^{\frac{c}{\nu}} \cdot u_r = S\left[\left(\frac{c}{\nu}\right)_b \cdot \Delta^b u_r\right]$$

gebildet uns denken.

Bei einer anderen Annahme der Glieder

$u_{r+\frac{1}{\nu}}$, $u_{r+\frac{2}{\nu}}$, $u_{r+\frac{3}{\nu}}$, ꝛc. ꝛc. (die zwischen den beiden Gliedern u_r und u_{r+1} der ersten Ur-Reihe gedacht werden, um die zweite Ur-Reihe zu erhalten) kann also die Gleichung 6.) des §. 40. (für $\mu = \frac{1}{\nu}$ genommen) nicht benutzt werden.

Zweite Abtheilung.

Laplace's Verfahren, um zu denselben in der ersten Abtheilung entwickelten Resultaten zu gelangen.

Vorerinnerung.

Denkt man sich die Glieder einer Ur-Reihe

$$\cdots\quad u_{r-2},\quad u_{r-1},\quad u_r,\quad u_{r+1},\quad u_{r+2},\quad \cdots$$

mit entsprechenden Potenzen von t multiplicirt, — denkt man sich also die Reihe

$$U = \cdots + u_{r-2}\cdot t^{r-2} + u_{r-1}\cdot t^{r-1} + u_r\cdot t^r + u_{r+1}\cdot t^{r+1} + u_{r+2}\cdot t^{r+2} + \cdots$$

und multiplicirt man diese Reihe mit $\frac{1}{t}-1$, so ist, während in U der Koeffizient von t^r das Glied u_r ist, in dem Produkt $\left(\frac{1}{t}-1\right)U$ der Koeffizient von t^r jetzt $u_{r+1}-u_r$, d. h. Δu_r. — Aus demselben Grunde wird der Koeffizient von t^r in dem Produkt $\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 U$ ausgedrückt seyn durch $\Delta u_{r+1}-\Delta u_r$ d. h. durch $\Delta^2 u_r$; während allgemein der Koeffizient von t^r in dem Produkt $\left(\frac{1}{t}-1\right)^n U$ ausgedrückt seyn wird durch $\Delta^n u_r$. — Auf diese Bemerkung gründet Laplace ein Verfahren $\Delta^n u_r$ umzuformen, dadurch, daß er $\left(\frac{1}{t}-1\right)^n U_r$ auch noch auf andern Wegen nach Potenzen von t entwickelt, wo dann der Koeffizient von t^r der neuen Ent-

wickelung, demselben in der alten Entwickelung, also dem $\Delta^n u_r$ gleich seyn muß. Dies mögen nun die folgenden Paragraphen näher aus einander setzen. (Vgl. §. 14. Anmerkg.).

§. 42.

Denkt man sich u_q, Δu_q, $\Delta^2 u_q$, rc.; desgleichen $\Delta^{-1} u_q$, $\Delta^{-2} u_q$, $\Delta^{-3} u_q$, rc. rc. als die Anfangsglieder einer Ur-Reihe und ihrer Differenz- und Summen-Reihen, indem q irgend eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null vorstellt; und sind eben so

$$u_{q+\nu},\quad \Delta u_{q+\nu-1},\quad \Delta^2 u_{q+\nu-2},\quad \Delta^3 u_{q+\nu-3},\quad \text{rc. rc.}$$

desgleichen $\Delta^{-1} u_{q+\nu+1}$, $\Delta^{-2} u_{q+\nu+2}$, $\Delta^{-3} u_{q+\nu+3}$, rc. rc. die Endglieder derselben Reihen, wo ν eine positive ganze Zahl, übrigens beliebig groß und noch so groß seyn kann; denkt man sich ferner, die Glieder dieser Reihen bezüglich mit

$$t^0,\quad t^1,\quad t^2,\quad t^3,\quad \text{rc rc.}$$

multiplicirt, und die Produkte summirt, so hat man eben so viele nach Potenzen von t fortlaufende Reihen, welche bezüglich durch

$$U_0,\quad U_1,\quad U_2,\quad U_3,\quad \text{rc. rc.}$$

desgleichen durch U_{-1}, U_{-2}, U_{-3}, rc. rc.

bezeichnet seyn mögen, so daß man allgemein, es mag $p = 0$ oder es mag p eine positive oder eine negative ganze Zahl seyn,

$$(\odot)\cdots\qquad U_p = S\left[\underset{a+b=\nu-p}{\Delta^p u_{q+a}\cdot t^a}\right]$$

hat. — Zwischen diesen Reihen U_0, U_1, U_2, rc., U_{-1}, U_{-2}, rc. rc., welche Laplace, obwohl nicht ganz passend, erzeugende Funktionen (fonctions génératrices) *)

*) Genau genommen, versteht Laplace unter fonction génératrice diejenige Funktion von t, welche, wenn sie nach Potenzen von t entwickelt wird, die fragliche Reihe erzeugt. Allein da die Glieder der Ur-Reihe

$$u_q,\quad u_{q+1},\quad u_{q+2},\quad \cdots\quad u_{q+\nu}$$

ganz willkührliche, durchaus keinem Gesetz unterworfene Werthe seyn können, so ist an die Existenz einer solchen erzeugenden Funktion nur in den seltensten

nennt, finden nun Abhängigkeiten statt, welche wir zunächst entwickeln wollen.

§. 43.

Wegen $\Delta u_{q+a} = u_{q+a+1} - u_{q+a}$

zerlegt sich das Aggregat

$$U_1 \text{ d. h. } S\left[\Delta u_{q+a} \cdot t^a\right]_{a+b=\nu-1}$$

in die Differenz zweier Aggregate, von denen das erstere

$$= \frac{1}{t} \cdot U_0 - \frac{1}{t} \cdot u_q \quad \text{(nach §. 42. ⊙.)},$$

das andere dagegen (wegen §. 42. ⊙)

$$= U_0 - u_{q+\nu} \cdot t^\nu$$

ist, — so daß man zuletzt hat

$$1) \quad U_1 = \left(\frac{1}{t} - 1\right) \cdot U_0 + (u_{q+\nu} \cdot t^\nu - u_q \cdot t^{-1}).$$

Aber weil auch wiederum

$$\Delta^2 u_{q+a} = \Delta u_{q+a+1} - \Delta u_{q+a}$$

ist, so findet sich genau eben so

$$U_2 = \left(\frac{1}{t} - 1\right) \cdot U_1 + (\Delta u_{q+\nu-1} \cdot t^{\nu-1} - \Delta u_q \cdot t^{-1});$$

oder, wenn man hier statt U_1 seinen Werth (aus 1.) substituirt,

$$2) \quad U_2 = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \cdot U_0 + (A_\nu \cdot t^\nu + A_{\nu-1} \cdot t^{\nu-1} + A_{-1} \cdot t^{-1} + A_{-2} \cdot t^{-2}),$$

wo links alle Potenzen von t von der 0ten bis zur $\nu-2^{ten}$ Vorkommen, während rechts das Produkt $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \cdot U_0$ auch noch vier Glieder enthält, welche bezüglich mit t^{-2}, t^{-1}, $t^{\nu-1}$ und t^ν affizirt sind, so daß dann die in den Klammern befindlichen und

---

Fällen und im Allgemeinen gar nicht zu denken, wenn man nicht die nach Potenzen von t fortlaufende Reihe selbst darunter versteht.

mit denselben Potenzen von t affizirten Glieder zur Rechten (in 2.) offenbar diese letztern in $\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \cdot U_0$ enthaltenen seyn müssen, mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, damit sich diese Glieder gegenseitig aufheben können.

So fortfahrend erhält man aber noch

$$3)\quad U_3 = \left(\frac{1}{t}-1\right)^3 \cdot U_0$$

und allgemein, so oft n eine positive ganze Zahl ist

$$\text{I.}\quad U_n = \left(\frac{1}{t}-1\right)^n \cdot U_0,$$

wenn man nur in I. (und folglich auch in 3., wo n den Werth 3 hat) auf der rechten Seite der Gleichung alle Glieder wegläßt, welche mit negativen oder mit höhern Potenzen von t versehen sind, als der $(\nu-n)^{tem}$, in so ferne der Ausdruck U_n links nur die Potenzen t^0, t^1, t^2, bis zu $t^{\nu-n}$ hin enthält (nach §. 42. ⊙).

§. 44.

Statt aber von U_0 auszugehen, kann man von U_{-n} ausgehen, und U_{-n+1}, U_{-n+2}, ... endlich U_0, in U_{-n} ausdrücken. Man erhält dann

$$\text{II.}\quad U_0 = \left(\frac{1}{t}-1\right)^n \cdot U_{-n},$$

wenn man nur in II. auf der rechten Seite alle Glieder wegläßt, welche mit negativen oder mit höhern Potenzen von t versehen sind, als die ν^{te} ist*).

---

*) Laplace hat aus dieser Gleichung II. gefolgert, daß auch

$$(\text{☾})\ldots\qquad \left(\frac{1}{t}-1\right)^{-n} \cdot U_0 = U_{-n}$$

seyn müsse. Es scheint, als wenn man diese Gleichung erhalten könnte, indem man die II. links und rechts mit $\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-n}$ d. h. mit

§. 45.

Außerdem findet sich aber noch, wenn m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist,

1) $$S\left[u_{q+a+m} \cdot t^a \atop a+b=\nu\right] = \left(\frac{1}{t}\right)^m \cdot U_0,$$

während, wenn n eine positive ganze Zahl ist (nach §. 43. I.)

2) $$S\left[\Delta^n u_{q+a} \cdot t^a \atop a+b=\nu-n\right] = \left(\frac{1}{t}-1\right)^n \cdot U_0,$$

also auch

3) $$S\left[\Delta^n u_{q+a+m} \cdot t^a \atop a+b=\nu-n\right] = \left(\frac{1}{t}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{t}-1\right)^n \cdot U_0$$

seyn wird, wenn man nur nicht übersieht, in diesen Gleichungen auf jeder Seite diejenigen Glieder wegzulassen, deren Potenzen von t auf der andern Seite gar nicht vorkommen. — Dabei ist überdies (nach der Bezeichnung des §. 42.) U_0 gegeben durch die Gleichung

4) $$S\left[u_{q+a} \cdot t^a \atop a+b=\nu\right] = U_0.$$

$t^n + n \cdot t_{n+1} + (n+1)_2 \cdot t^{n+2} + \ldots$ multiplicirt. Bedenkt man aber, daß die Gleichung II. nur dann eine richtige ist, wenn man rechts noch 2n Glieder addirt oder subtrahirt, welche bezüglich mit

$$t^{-n},\ t^{-(n-1)},\ \ldots\ t^{-2},\ t^{-1},\ t^{\nu+1},\ t^{\nu+2},\ t^{\nu+3},\ \ldots\ t^{\nu+n}$$

affizirt sind, so bemerkt man bald, daß gedachte Multiplikation auf der linken Seite zwar $\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-n} \cdot U_0$ liefert, welcher Ausdruck mit t^n beginnt und dann alle höheren Potenzen von t enthält, daß aber auf der rechten Seite außer U_{-n} noch eine unendliche Menge von Gliedern erscheint, welche mit allen und namentlich auch mit allen denjenigen Potenzen von t affizirt sind, die schon in U_{-n} vorkommen. Diese Gleichung (C) des Laplace, so wie alle Folgerungen, die er daraus zieht, darf man daher nicht als zulässig ansehen. (Vgl. in der ersten Abtheilung dieses Kapitels, die über die nothwendigen Korrektionen der Formeln I.—III. des §. 38. gemachten Bemerkungen).

§. 46.

Mittelst dieser Gleichungen kann man nun eine beliebige Anzahl von Relationen zwischen den Gliedern der Ur=Reihe und ihrer Differenz=Reihen herholen.

Betrachtet man nämlich zunächst eine beliebige Funktion f_t von t, setzt man

$$1)\quad \frac{1}{t^\mu}\cdot\left(\frac{1}{t}-1\right)^\varepsilon = z,$$

wo μ beliebig positiv oder negativ ganz oder Null ist, während ε beliebig positiv ganz oder Null gedacht wird, so kann man t in z ausdrücken und f_t in eine Funktion von z umwandeln. Dann läßt sich f_t einmal nach Potenzen von $\frac{1}{t^m}$, wo m positiv oder negativ ganz gedacht wird, — dann aber auch nach Potenzen von z entwickeln, so daß man hat

$$2)\quad f_t = S\left[A_c\cdot\left(\frac{1}{t^m}\right)^c\right] = S\left[B_b\cdot z^b\right].$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit U_0, so ergiebt sich, wenn man statt z zu gleicher Zeit seinen Werth (aus 1.) setzt

$$3)\quad S\left[A_c\cdot\left(\frac{1}{t}\right)^{cm}\cdot U_0\right] = S\left[B_b\cdot\left(\frac{1}{t}\right)^{b\mu}\cdot\left(\frac{1}{t}-1\right)^{b\varepsilon}\cdot U_0\right].$$

Setzt man nun hier statt $\left(\frac{1}{t}\right)^{cm}\cdot U_0$ und statt $\left(\frac{1}{t}\right)^{b\mu}\cdot\left(\frac{1}{t}-1\right)^{b\varepsilon}\cdot U_0$ ihre Werthe (aus §. 45. N.N. 1 und 3.), so erhält man (aus 3.) sogleich

$$4)\quad S[A_c\cdot u_{q+a+cm}\cdot t^a] = S[B_b\cdot \Delta^{b\varepsilon}u_{q+a+b\mu}\cdot t^a],$$

wenn man nur anf jeder Seite die Glieder wegläßt, deren Potenzen von t auf der andern Seite gar nicht vorkommen.

In dieser Gleichung (4.) müssen nun nothwendig die Koeffizienten irgend einer und derselben Potenz t^n auf jeder Seite einander gleich seyn; also hat man

5) $S[A_\varepsilon \cdot u_{q+n+\varepsilon m}] = S[B_b \cdot \Delta^{b\varepsilon} u_{q+n+b\mu}]$,

oder, wenn man p statt q+n schreibt,

6) $S[A_\varepsilon \cdot u_{p+\varepsilon m}] = S[B_b \cdot \Delta^{b\varepsilon} u_{p+b\mu}]$.

Diese Relation zwischen den Gliedern einer Ur-Reihe und ihrer Differenz-Reihen ist eine Quelle von unendlich-vielen einzelnen Relationen, weil die Funktion f_t, ferner die positiven oder negativen ganzen Zahlen m und μ, desgleichen die positive ganze Zahl ε ganz beliebig und jedesmal anders gewählt werden können, so daß zu gleicher Zeit auch die Koeffizienten A_ε d. h. A_0, A_1, A_2, A_3, ꝛc. ꝛc., aber auch die Koeffizienten B_b d. h. B_0, B_1, B_2, B_3, ꝛc. ꝛc. jedesmal anders und anders seyn werden.

Anmerkg. Das ganze Verfahren läuft offenbar darauf hinaus, eine und dieselbe Funktion von t, nämlich das Produkt $f_t \cdot U_0^{\,t}$ auf zwei verschiedenen Wegen in eine und dieselbe nach ganzen Potenzen von t fortlaufende Reihe zu verwandeln. Dann drücken sich die Koeffizienten dieser Reihe zweimal, jedesmal in einer andern Form aus, und so hat man so viele Gleichungen als Koeffizienten. (S. §. 14. Anmerkg.). Es wird nun darauf ankommen, die Funktion f_t und die Zahlen m, μ, ε so zu wählen, daß allemal gerade die verlangten Relationen sich ergeben.

§. 47.

Vergleicht man aber die Gleichung 5.) mit der Gleichung 2.) des vorhergehenden Paragraphen, so erhellet augenblicklich, daß die Relation 5.) unmittelbar aus der Gleichung 2.) hervorgeht, wenn man daselbst statt

$\left(\frac{1}{t^m}\right)^\varepsilon$ und z^b bezüglich $u_{p+\varepsilon m}$ und $\Delta^{b\varepsilon} u_{p+b\mu}$ schreibt.

Die praktische Regel, zur Relation 6.) zu gelangen, ist daher diese:

Man nehme eine beliebige Funktion f_t und entwickele sie

einmal nach Potenzen von $\frac{1}{t^{\pm m}}$ und dann noch nach Potenzen von z, indem man $\frac{1}{t^\mu}\left(\frac{1}{t}-1\right)^\varepsilon = z$ setzt und daraus t und f_t in z ausgedrückt findet; — man setze in der erstern Entwickelung u_{p+cm} statt der Potenz $\left(\frac{1}{t^m}\right)^c$ und in der andern $\Delta^{b\varepsilon} u_{p+b\mu}$ statt der Potenz z^b, und verbinde beide Resultate durch das Gleichheits-Zeichen.

Beispiel. Nimmt man

1) $$f_t = \left(\frac{1}{t^\mu}-1\right)^n$$

und ist

2) $$\frac{1}{t}-1 = z,$$

so hat man

3) $$\frac{1}{t} = 1+z, \quad \left(\frac{1}{t}\right)^\mu = (1+z)^\mu,$$

also auch

4) $$f_t = [(1+z)^\mu - 1]^n.$$

Daraus folgt also (aus 1.)

1) $$f_t = S\left[n_c \cdot (-1)^c \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{c\mu}\right]$$

und (aus der 4.)

2) $$f_t = (S[\mu_{b+1} \cdot z^{b+1}])^n;$$

also, wenn man die eben gegebene praktische Regel ausführt, zu gleicher Zeit aber der symbolischen Schreibweise der Anmerkg. 2. zu §. 37. sich bedient,

$$S[n_c \cdot (-1)^c \cdot u_{p+c\mu}] = (S[\mu_{b+1} \cdot \Delta^{b+1}])^n \cdot u_p$$

oder

$$u_p \cdot (u_\mu - u_0)^n = [(1+\Delta)^\mu - 1]^n \cdot u_p,$$

während $u_p \cdot (u_\mu - u_0)^n$ nach (§. 39. N. 1. und §. 40.) die n^{te} Differenz $\Delta'^n u_p$ einer Ur-Reihe ist, die bezüglich aus den Gliedern

$$u_p, \quad u_{p+\mu}, \quad u_{p+2\mu}, \quad u_{p+3\mu}, \quad \text{rc. rc.}$$

der andern Ur-Reihe u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, u_{p+3}, u_{p+4}, 2c. 2c. besteht.

Dies ist aber genau die Formel, welche wir bereits (im §. 40. N.N. 4. 6.) hingestellt haben.

§. 48.

In den Relationen, welche man auf diesem Wege erhält, werden beide Seiten der Gleichung Reihen seyn, zum Theil endliche, zum Theil unendliche. — Der gewöhnlichste Zweck ist aber, ein einziges Glied u_{p+m}, wo m positiv oder negativ ganz ist, in die Glieder der Differenz-Reihen auszudrücken. Will man daher bloß diesen Zweck erreichen, so darf man nur $f_t = \frac{1}{t^m}$ nehmen, wo denn die Gleichung N. 6. des §. 46.) sogleich in

$$(\odot)\cdots \qquad u_{p+m} = S[B_\varepsilon \cdot \Delta^{b\varepsilon} u_{p+b\mu}]$$

übergeht, während B_ε die Koeffizienten bedeuten der Entwicklung von $\frac{1}{t^m}$ nach Potenzen von z, unter der Voraussetzung, daß zwischen t und z die Gleichung

$$\frac{1}{t^\mu} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^\varepsilon = z$$

angenommen worden ist.

Beispiel 1. Setzt man

$$\frac{1}{t} - 1 = z,$$

so daß $\mu = 0$, $\varepsilon = 1$ ist; und nimmt man $f_t = \frac{1}{t^m}$, so erhält man

$$f_t = \left(\frac{1}{t}\right)^m = (1+z)^m = S[m_b \cdot z^b].$$

Also hat man

$$u_{p+m} = S[m_b \cdot \Delta^b u_p] = (1+\Delta)^m \cdot u_p;$$

und dies ist die bereits (im §. 37. N. 2.) gefundene Relation.

Beispiel 2. Setzt man

$$t^r \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right) = z,$$

so daß $\mu = -r$, $\varepsilon = 1$ ist; und nimmt man wieder $f_t = \frac{1}{t^m}$, so erhält man f_t nach Potenzen von z entwickelt, wenn man das Lagrangesche Theorem (§. 6.) anwendet, und zwar findet sich

$$f_t \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{t^m} = S\left[\frac{m \cdot (m+\mathfrak{b}r-1)^{\mathfrak{b}-1|-1}}{\mathfrak{b}!} \cdot z^{\mathfrak{b}}\right].$$

Folglich hat man

$$u_{p+m} = S\left[\frac{m \cdot (m+\mathfrak{b}r-1)^{\mathfrak{b}-1|-1}}{\mathfrak{b}!} \cdot \Delta^{\mathfrak{b}} u_{p-\mathfrak{b}r}\right]$$

d. h.

$$u_{p+m} = u_p + m \cdot \Delta u_{p-r} + \frac{m(m+r-1)}{2!} \cdot \Delta^2 u_{p-2r} + \frac{m(m+2r-1)(m+2r-2)}{3!} \cdot \Delta^3 u_{p-3r} + \cdots$$

§. 49.

Kann man die Funktion f_t in die Form

1) $\quad f_t = Z + t^\alpha \cdot Z' + t^\beta \cdot Z'' + \cdots$

verwandeln, wo Z, Z', Z'', rc. rc. bereits Reihen sind, die nach Potenzen von z fortlaufen, unter der Voraussetzung, daß

2) $\quad \frac{1}{t^\mu} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^\varepsilon = z$

gesetzt worden; so ist

3) $\quad f_t \cdot U_0 = Z \cdot U_0 + Z' \cdot t^\alpha \cdot U_0 + Z'' \cdot t^\beta \cdot U_0 + \cdots$

Wird nun wieder f_t nach Potenzen von $\left(\frac{1}{t^m}\right)$ entwickelt, so daß man

4) $\quad f_t = S\left[A_c \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{cm}\right]$

hat, und sind die durch

Z, Z', Z'', rc. rc.

bezeichneten Reihen bezüglich diese:

$$S[B_b \cdot z^b], \qquad S[C_c \cdot z^c], \qquad S[D_f \cdot z^f], \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

so geht die Gleichung 3.) über in

$$5) \quad S\left[A_t \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{cm} \cdot U_0\right]$$
$$= S[B_b \cdot z^b \cdot U_0] + t^\alpha \cdot S[C_c \cdot z^c \cdot U_0] + t^\beta \cdot S[D_f \cdot z^f \cdot U_0] + \cdots$$

Setzt man nun hier wieder statt $\left(\frac{1}{t}\right)^{cm} \cdot U_0$, $z^b \cdot U_0$, $z^c \cdot U_0$, $z^f \cdot U_0$, ꝛc. ꝛc. ihre Werthe (aus §. 45. N.N. 1.—3.) und nimmt man links und rechts die Koeffizienten von t^n, so erhält man (aus 5.), wenn man noch p statt $q+n$ schreibt

$$6) \quad S[A_t \cdot u_{p+cm}] = S[B_b \cdot \Delta^{b\varepsilon} u_{p+b\mu}] + S[C_c \cdot \Delta^{c\varepsilon} u_{p-\alpha+c\mu}]$$
$$+ S[D_f \cdot \Delta^{f\varepsilon} u_{p-\beta+f\mu}] + \text{ ꝛc. ꝛc.,}$$

wenn nur α, β, ꝛc. ꝛc. positive oder negative ganze Zahlen sind; und diese Gleichung ist eine noch allgemeinere Relation zwischen Gliedern der Ur-Reihe und ihrer Differenz-Reihen, welche übrigens aus der Gleichheit der Entwickelungen von f_t in 4.) und 1.) dadurch hervorgeht, daß man in 4.)

u_{p+cm} statt $\left(\frac{1}{t}\right)^{cm}$, in 1.) dagegen in den Reihen

$$Z, \qquad t^\alpha \cdot Z', \qquad t^\beta \cdot Z'', \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

bezüglich

$$\Delta^{b\varepsilon} u_{p+b\mu}, \quad \Delta^{c\varepsilon} u_{p-\alpha+c\mu}, \quad \Delta^{f\varepsilon} u_{p-\beta+f\mu}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

statt der Potenzen

$$z^b, \qquad t^\alpha \cdot z^c, \qquad t^\beta \cdot z^f, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

schreibt.

Nimmt man noch überdies $f_t = \frac{1}{t^m}$, so erhält man auf diesem Wege wiederum bloß u_{p+m} in die Glieder der Differenz-Reihen ausgedrückt.

Beispiel. Setzt man

$$t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 = z$$

so daß $\mu = -1$, $\varepsilon = 2$ ist; und nimmt man $f_t = \frac{1}{t^m}$, so kann man (nach §. 49. verfahrend)

$$f_t = \frac{1}{t^m} = Z - t \cdot Z'$$

finden, wo

$$Z = \underset{\cdot}{S}\left[\frac{(m+1-\mathfrak{d})^{2\mathfrak{d}+1|1}}{(2\mathfrak{d}+1)!} \cdot z^{\mathfrak{d}}\right]$$

und

$$Z' = S\left[\frac{(m-\mathfrak{e})^{2\mathfrak{e}+1|1}}{(2\mathfrak{e}+1)!} \cdot z^{\mathfrak{e}}\right].$$

Also hat man die Gleichung

$$u_{p+m} = S\left[\frac{(m+1-\mathfrak{d})^{2\mathfrak{d}+1|1}}{(2\mathfrak{d}+1)!} \cdot \Delta^{2\mathfrak{d}} u_{p-\mathfrak{d}}\right]$$
$$- S\left[\frac{(m-\mathfrak{e})^{2\mathfrak{e}+1|1}}{(2\mathfrak{e}+1)!} \cdot \Delta^{2\mathfrak{e}} u_{p-1-\mathfrak{e}}\right].$$

§. 50.

Sollte aber f_t auf die Form

1) $$f_t = Z + t^{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^a \cdot Z' + t^{\beta} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^b \cdot Z'' + \ldots$$

gebracht werden können, wo α, β, 2c. 2c. positive oder negative, dagegen a, b, 2c. bloß positive ganze Zahlen seyn sollen, so führt diese Umformung von f_t, wenn übrigens alles wie im §. 49. bleibt, zu folgender Relation

$$S[A_{\mathfrak{e}} \cdot u_{p+\mathfrak{e}m}] = S[B_{\mathfrak{d}} \cdot \Delta^{\mathfrak{d}\varepsilon} u_{p+\mathfrak{d}\mu}] + S[C_{\mathfrak{e}} \cdot \Delta^{\mathfrak{e}\varepsilon+a} u_{p-\alpha+\mathfrak{e}\mu}]$$
$$+ S[D_{\mathfrak{f}} \cdot \Delta^{\mathfrak{f}\varepsilon+b} u_{p-\beta+\mathfrak{f}\mu}] + \text{2c. 2c.},$$

wenn nur

$$z = \frac{1}{t^{\mu}} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\varepsilon}$$

gedacht wird.

Beispiel. Bemerkt man, daß in dem Beispiele des vorhergehenden §. 49. Z dieselbe Funktion von $m+1$ ist, welche Z' von m, daß also, wenn man Z durch Z_{m+1} vorstellt, dann Z' durch Z_m bezeichnet werden könne, so hat man in jenem Beispiele noch

1) $$\frac{1}{t^m} = Z_{m+1} - t \cdot Z_m;$$

folglich, wenn man hier $m-1$ statt m setzt, und dann durch t dividirt

2) $$\frac{1}{t^m} = t^{-1} \cdot Z_m - Z_{m-1}.$$

Addirt man nun diese Gleichungen und nimmt man die Hälfte, so hat man noch

3) $$\frac{1}{t^m} = \tfrac{1}{2}(Z_{m+1} - Z_{m-1}) + \tfrac{1}{2}(t^{-1} - t) Z_m$$

$$= \tfrac{1}{2}(Z_{m+1} - Z_{m-1}) + \tfrac{1}{2}(1+t)\left(\frac{1}{t} - 1\right) \cdot Z_m .$$

Und weil sich noch

$$\tfrac{1}{2}(Z_{m+1} - Z_{m-1}) = S\left[\frac{m^{a|-1} \cdot m^{a|+1}}{(2a)!} \cdot z^a\right]$$

findet, so folgt aus dieser Gleichung 3.) sogleich

$$u_{p+m} = S\left[\frac{m^{a|-1} \cdot m^{a|+1}}{(2a)!} \cdot \varDelta^{2a} u_{p-a}\right]$$
$$+ S\left[\frac{(m-b)^{2b+1|1}}{(2b+1)!} \cdot \tfrac{1}{2}\left(\varDelta^{2b+1} u_{p-b} + \varDelta^{2b+1} u_{p-1-b}\right)\right].\ ^{*)}$$

Schluß-Anmerkung.

Wir glauben diese Materie nicht weiter verfolgen zu dürfen, um doch gegen unsere Leser die Pflicht erfüllt zu haben, ihnen keine Ansicht vorzuenthalten, deren Verfolgung auch bei anderen Gelegenheiten von Nutzen seyn kann.

---

*) Diese Formel hat schon Stirling, höchst wahrscheinlich durch Induktion, gefunden.

Aus derselben Formel kann man noch eine andere ebenfalls schon von Stirling hingestellte Formel ableiten, wenn man in ihr $n+1$ statt n setzt, dann sie selber von der neuen subtrahirt, und das Resultat durch $\varDelta$ wiederum dividirt, d. h. in dem Resultat die erste Summen-Reihe als Ur-Reihe nimmt.

In Bezug auf den Inhalt des ganzen Kapitels bemerken wir noch, daß, wenn wir aus einer Ur-Reihe

$$\cdots \quad u_{r-1}, \quad u_r, \quad u_{r+1}, \quad u_{r+2}, \quad \cdots$$

neue Reihen gebildet und ihre Glieder abermals durch vorgesetzte

$$\Delta, \quad \Delta^2, \quad \Delta^3, \quad \text{rc. rc.}$$

bezeichnet hätten, aber nicht nach dem Gesetze

$$\Delta^{p+1} u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

sondern nach irgend einem anderen Gesetze, etwa nach dem Gesetze

$$\Delta^{p+1} u_s = a \cdot \Delta^p u_{s+1} + b \cdot \Delta^p u_s$$

so würden aus dieser jetzigen Gleichung, da sie unendlichmal unendlich-viele specielle Gleichungen in sich schließt, die alle mit einander verbunden werden können, abermals eine Reihe von Relationen hervorgegangen seyn. — Man hätte z. B. gehabt, in Symbolen geschrieben

$\Delta u_r = (au_1 + bu_0) \cdot u_r$, $\quad \Delta^2 u_r = (au_1 + bu_0) \cdot \Delta u_r$, u. s. w. f.;
also auch $\Delta^2 u_r = (au_1 + bu_0)^2 \cdot u_r = a^2 u_{r+2} + 2ab u_{r+1} + b^2 u_r$;
und so auch

$$\Delta^n u_r = (au_1 + bu_0)^n \cdot u_r = S[n_c \cdot a^{n-c} b^c \cdot u_{r+n-c}];$$

u. s. w. f.

Man hat sich aber bisher mit der Betrachtung der Differenz-Reihen begnügt, weil ihre nähere Kenntniß bei der Construktion von Tabellen aller Art (Logarithmen-Tafeln, Sinus-Tafeln), so wie beim Einschalten von Zwischen-Gliedern einer Tabelle (Interpoliren) von der größten Wichtigkeit ist.

Fünftes Kapitel.

Von den endlichen Differenzen und Summen.

Erste Abtheilung.

Auffindung der endlichen Differenzen und Summen von entwickelt gegebenen Funktionen.

§. 51.

A. Bezeichnet f_x eine beliebige Funktion von x, und f_{x+ph}, das was aus f_x wird, wenn man $x+ph$ statt x schreibt, und nimmt man nun die Glieder

1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

einer Ur-Reihe so, daß für jeden positiven (oder negativen) ganzen Werth von s,

2) $$u_s = f_{x+sh}, \quad \text{also} \quad u_0 = f_x$$

wird, d. h. nimmt man die Werthe der Funktion f_x, welche sie annimmt, wenn nach und nach x, $x+h$, $x+2h$, ... statt x geschrieben wird, zu Gliedern der Ur-Reihe 1.), so heißt diese Funktion f_x das **allgemeine Glied** dieser Ur-Reihe 1.).

B. Bezeichnen wir nun durch

$$\Delta f_x, \quad \Delta^2 f_x, \quad \Delta^3 f_x, \quad \ldots \quad \Delta^n f_x$$

die **allgemeinen Glieder** der aus der Ur-Reihe 1.) hervorgehenden 1ten, 2ten, 3ten, ... nten Differenz-Reihe, so daß

3) $$\Delta^n u_s = \Delta^n f_{x+sh}, \quad \text{also} \quad \Delta^n u_0 = \Delta^n f_x$$

ist, indem man unter $\Delta^n f_{x+sh}$ das versteht, was aus $\Delta^n f_x$ wird, wenn man $x+sh$ statt x schreibt, — so ist nothwendig

$$\Delta f_x = f_{x+h} - f_x, \qquad \Delta^2 f_x = \Delta f_{x+h} - \Delta f_x, \quad \text{u. s. w.}$$

und allgemein

$$4) \qquad \Delta^{n+1} f_x = \Delta^n f_{x+h} - \Delta^n f_x,$$

wenn nur n positiv ganz ist.

C. Bezeichnen wir aber durch

$$\Delta^{-1} f_x, \quad \Delta^{-2} f_x, \quad \Delta^{-3} f_x, \quad \ldots \quad \Delta^{-n} f_x$$

die allgemeinen Glieder der aus der Ur-Reihe 1.) hervorgehenden 1ten, 2ten, 3ten, ... nten Summen-Reihe, so gelten die Gleichungen 3.) und 4.) nicht bloß, wenn n positiv ganz, sondern auch wenn n negativ ganz ist.

D. Was wir aber so eben durch $\Delta^{-1} f_x$ und $\Delta^{-n} f_x$ bezeichnet haben, wird gewöhnlich bezüglich durch Σf_x und $\Sigma^n f_x$ bezeichnet. Dann schreiben sich die Gleichungen 3.) und 4.), wenn $-n$ statt n gesetzt wird, so:

$$5) \qquad \Delta^{-n} u_s = \Sigma^n f_{x+sh},$$

$$6) \qquad \Sigma^{n-1} f_x = \Sigma^n f_{x+h} - \Sigma^n f_x$$

und

$$7) \qquad f_x = \Sigma f_{x+h} - \Sigma f_x,$$

wo z. B. $\Sigma^n f_{x+sh}$ das bedeutet, was aus $\Sigma^n f_x$ wird, wenn man $x+sh$ statt x schreibt, während die 7.) in der 6.) als ein besonderer Fall enthalten ist, sobald man unter $\Sigma^0 f_x$ (eben so wie unter $\Delta^0 f_x$) die Funktion f_x selbst versteht*).

E. Aus der 4.) folgt noch

$$8) \qquad \Delta^n f_{x+h} = \Delta^n f_x + \Delta^{n+1} f_x$$

d. h.

$$f_{x+h} = f_x + \Delta f_x$$

$$\Delta f_{x+h} = \Delta f_x + \Delta^2 f_x$$

u. s. w. f.

---

*) Man sieht, daß wenn auch f_x selbst noch nicht h enthalten sollte, doch Δf_x, $\Delta^2 f_x$, 2c. eben so Σf_x, $\Sigma^2 f_x$, 2c. 2c. schon Funktionen von x und auch von h seyn werden.

F. Nimmt man $f_x = x$, so ist $\Delta f_x = (x+h) - x = h$ d. h. es ist allemal $h = \Delta x$; d. h. das, was Δx selbst, der angenommenen Bezeichnung zufolge bedeutet, ist nichts anders als eben der Zuwachs, den x von Glied zu Glied erleiden soll, während Δf_x den Zuwachs vorstellt (nach E.) den die Funktion f_x erleidet, wenn eben x um h oder Δx wächst.

§. 52.

Diese durch Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, ꝛc. ꝛc. bezeichneten Funktionen von x (und h) nennt man bezüglich „die zu der „Differenz Δx oder h von x, gehörigen ersten, „zweiten, dritten, ꝛc. ꝛc. endlichen Differenzen der „Funktion f_x."

Die durch $\Delta^{-1} f_x$, $\Delta^{-2} f_x$, $\Delta^{-3} f_x$, ꝛc. ꝛc. und auch bezüglich durch Σf_x, $\Sigma^2 f_x$, $\Sigma^3 f_x$, ꝛc. ꝛc. bezeichneten Funktionen von x (und h) nennt man dagegen „die zur Dif„ferenz Δx oder h von x, gehörigen ersten, zwei„ten, dritten ꝛc. ꝛc. endlichen Summen oder endlichen „Integrale der Funktion f_x."

§. 53.

Ist f_x gegeben, so sind Δf_x, $\Delta^2 f_x$, ꝛc. ꝛc. dadurch völlig bestimmt und gegeben; — nicht dasselbe ist der Fall bei Σf_x, $\Sigma^2 f_x$, ꝛc. ꝛc. — Es können nämlich alle Glieder einer Summen-Reihe um gleichviel vermehrt werden, ohne daß sie dadurch den Charakter derselben zur Ur-Reihe gehörigen Summen-Reihe verliert. Ist also φ_x eine der durch Σf_x bezeichneten Funktionen, so genügt der Definition von Σf_x auch die Funktion $\varphi_x + C$, und zwar nicht bloß, wenn C nach x konstant d. h. von x ganz unabhängig gedacht wird, sondern auch, wenn unter C eine ganze beliebige Funktion von $Sin\frac{2\mu\pi x}{h}$ und $Cos\frac{2\nu\pi x}{h}$ verstanden wird, während μ und ν positiv oder

negativ ganz sind; weil letztere Funktion ebenfalls ihren Werth nicht verändert, wenn $x+h$ statt x gesetzt wird.

Diese Konstante C, oder diese periodische Konstante $C=\psi_{s,c}$, wo $s=Sin\frac{2\mu\pi x}{h}$ und $c=Cos\frac{2\nu\pi x}{h}$ und μ und ν beliebig positiv oder negativ ganz sind, — muß also zu jeder Funktion φ_x, welche der Definition von $\Delta^{-1}f_x$ oder Σf_x entspricht, noch hinzugedacht werden, wenn man alle Funktionen φ_x+C haben will, welche der Definition von $\Delta^{-1}f_x$ oder Σf_x entsprechen.

§. 54.

Denken wir uns wieder die Funktion f_x ganz beliebig und daraus abermals die Glieder einer Ur-Reihe

$$\ldots\quad f_{x-h},\quad f_x,\quad f_{x+h},\quad f_{x+2h},\quad f_{x+3h},\quad \ldots$$

gebildet, so hat man sogleich (aus §. 37.)

1) $\Delta^n f_x = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot f_{x+(n-a)h}]$ *)

2) $f_{x+nh} = (1+\Delta)^n \cdot f_x = S[n_a \cdot \Delta^a f_x]$

3) $f_{x-nh} = S[(-1)^a n_a \cdot \Delta^a f_{x-ah}]$ **).

Der Satz §. 36. N. 3. oder §. 38. Anmerkg. 1. Nr. a. aber schreibt sich für die jetzige Ur-Reihe so:

---

*) Man konnte diese Gleichung auch so schreiben

$$\Delta^n f_x = (f_h - f_0)^n f_x,$$

wenn man die n[te] Potenz rechts sich nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, statt $(f_h)^{n-a}$ aber $f_{(n-a)h}$ geschrieben und nachgehends alle Glieder der Form nach mit f_x dergestalt multiplicirt sich denkt, daß man $f_{(n-a)\cdot h+x}$ statt $f_{(n-a)h}\cdot f_x$ setzt.

**) Oder

$$f_{x-nh} = (1-\Delta f_{-h})^n \cdot f_x,$$

wenn man wieder die symbolische Schreibweise gebrauchen will.

4) $f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots + f_{x+(n-1)h} = \Sigma f_{x+nh} - \Sigma f_x$, *)
wenn Σf_{x+nh} das vorstellt, was aus Σf_x hervorgeht, sobald $x+nh$ statt x geschrieben wird.

Kann also aus der gegebenen Funktion f_x das endliche Integral Σf_x gefunden werden, so kann man sogleich die Summe von n Gliedern der Reihe $f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots$ angeben.

§. 55.

1) Ist $f_x = \psi_x$ für jeden Werth von x, so ist auch $\Delta f_x = \Delta \psi_x$, $\Delta^2 f_x = \Delta^2 \psi_x$, u. s. w.

2) Ist $\Sigma f_x = \varphi_x$, so ist auch $\Sigma f_x = \varphi_x + C$, wo C entweder eine absolute Konstante nach x, d. h. von x ganz unabhängig, übrigens ganz willkührlich gedacht ist, oder wo C eine periodische Konstante nach x, d. h. eine ganz willkührliche Funktion von $Sin\frac{2\mu\pi x}{h}$ und $Cos\frac{2\nu\pi x}{h}$ ist, während μ und ν beliebig positiv oder negativ ganz oder Null vorausgesetzt werden (S. §. 53.). — Die absolute Konstante kann aber als in der periodischen enthalten angesehen werden.

3) Ist $\Sigma f_x = \varphi_x$ und zugleich auch $\Sigma f_x = \psi_x$ gefunden, so ist $\varphi_x - \psi_x$ entweder eine absolute oder eine periodische Konstante nach x (so daß $\varphi_x - \psi_x$ auch der Null gleich seyn kann).

4) Es ist allemal

a) $\Delta(\Sigma f_x) = f_x$

aber b) $\Sigma(\Delta f_x) = f_x + C$ **),

wo C jede willkührliche (periodische) Konstante nach x, vorstellt.

---

*) Diese Gleichung ist eigentlich keine andere als folgende
$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0$,
welche sich ebenfalls von selbst versteht.

**) Die Summe Σf_x stellt nämlich allemal unendlich-viele Funktionen

§. 56.

Ist C eine beliebige (periodische) Konstante nach x, so ist allemal

$$\text{I.}\quad \Delta C = 0 \quad \text{und} \quad 1)\quad \Sigma 0 = C;$$

$$\text{II.}\quad \Delta(\varphi_x \pm \psi_x) = \Delta\varphi_x \pm \Delta\psi_x \quad \text{und} \quad 2)\quad \Sigma(\varphi_x \pm \psi_x) = \Sigma\varphi_x \pm \Sigma\psi_x{}^{*});$$

$$\text{III.}\quad \Delta(C\cdot\varphi_x) = C\cdot\Delta\varphi_x \quad \text{und} \quad 3)\quad \Sigma(C\varphi_x) = C\cdot\Sigma\varphi_x;$$

$$\text{IV.}\quad \Delta(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_x\cdot\Delta\psi_x + \psi_x\cdot\Delta\varphi_x + \Delta\varphi_x\cdot\Delta\psi_x$$
$$= \varphi_x\cdot\Delta\psi_x + \Delta\varphi_x\cdot\psi_{x+h};$$

und

$$4)\quad \Sigma(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_x\cdot\Sigma\psi_x - \Sigma(\Delta\varphi_x\cdot\Sigma\psi_{x+h}),{}^{*})$$

wenn $\Sigma\psi_x$ eines der endlichen Integrale von ψ_x und $\Sigma\psi_{x+h}$ das vorstellt, was aus der eben gedachten Funktion von x wird, wenn man $x+h$ statt x setzt **).

Die Formeln I.—IV. ergeben sich unmittelbar aus dem Begriff der Differenz, nach welchem z. B.

$$\Delta(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_{x+h}\cdot\psi_{x+h} - \varphi_x\cdot\psi_x \quad \text{und} \quad \varphi_{x+h} = \varphi_x + \Delta\varphi_x,$$

---

von x vor, die aber paarweise von einander stets nur um eine (periodische) Konstante (nach x) von einander verschieden seyn können. Unter den durch $\Sigma(\Delta f_x)$ vorgestellten Funktionen ist nun f_x selbst die eine, während f_x+C sie alle enthält.

*) In den Gleichungen, welche Summen-Zeichen enthalten, muß auf der einen Seite allemal noch eine willkührliche (periodische) Konstante hinzugedacht werden, die wir aber im Schreiben hier stets weglassen wollen.

**) Man setzt $\Sigma(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_x\cdot\Sigma\psi_x + E_x$,
wo E_x noch gesucht wird. Nimmt man nun links und rechts die Differenzen, so erhält man (nach IV. und II.)

$$\varphi_x\cdot\psi_x = \varphi_x\cdot\Delta(\Sigma\psi_x) + \Delta\varphi_x\cdot\Sigma\psi_x + \Delta\varphi_x\cdot\Delta\Sigma\psi_x + \Delta E_x$$

d. h. $\Delta E_x = -\Delta\varphi_x\cdot\Sigma\psi_x - \Delta\varphi_x\cdot\Delta\Sigma\psi_x$
$= -\Delta\varphi_x\cdot(\Sigma\psi_x + \Delta\Sigma\psi_x) = -\Delta\varphi_x\cdot\Sigma\psi_{x+h}$,

in so ferne $f_x + \Delta f_x = f_{x+h}$ ist. Dadurch aber ist die Richtigkeit der Formel 4.) außer Zweifel gestellt.

so wie $\psi_{x+h} = \psi_x + \Delta\psi_x$ ist. — Die Nummern 1.—4. beweisen sich dadurch, daß man rechts die Differenzen nimmt.

Ferner ist

V. $\Delta(f_{x+p}) = [\Delta f_x]_{x+p}$ und 5) $\Sigma(f_{x+p}) = [\Sigma f_x]_{x+p}$,

wenn $[\Delta f_x]_{x+p}$, $[\Sigma f_x]_{x+p}$ das bedeuten, was bezüglich aus Δf_x, Σf_x wird, wenn man $x+p$ statt x schreibt, während p willkührlich konstant (nach x) gedacht wird. Denn es ist $\Delta(f_{x+p}) = f_{x+h+p} - f_{x+p}$, also das was aus $f_{x+h} - f_x$ d. h. aus Δf_x wird, wenn man überall $x+p$ statt x schreibt. — Wir schreiben daher in der Folge allemal statt $\Delta(f_{x+p})$ und $\Sigma(f_{x+p})$ bloß Δf_{x+p} und Σf_{x+p} und verstehen unter den letztern Zeichen das, was aus Δf_x und Σf_x wird, sobald man $x+p$ statt x schreibt.

§. 57.

Ferner findet sich noch aus der Definition von Δf_x und Σf_x das nachstehende:

1) $\Delta x = h$, *) nämlich $= (x+h) - x$,

$$\text{also} \quad \Sigma 1 = \frac{x}{h} + C;$$

2) $\Delta(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)$,

$$\text{also} \quad \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C;$$

3) $\Delta^2(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^2$,

$$\text{also} \quad \Sigma^2(a^x) = \frac{a^x}{(a^h - 1)^2} + C \cdot \frac{x}{h} + C_1;$$

---

*) Indem wir den Zuwachs, den f_x erleidet, wenn $x+h$ statt x gesetzt wird, durch Δf_x bezeichnen, ist der Zuwachs h, den x selbst dadurch erleidet, zugleich nothwendig auch durch Δx zu bezeichnen. Wir wollen daher künftig zwar noch h stehen lassen, aber immer daran denken, daß eigentlich Δx dafür stehen könnte und müßte, wenn eine ganz gleichmäßige Bezeichnung stattfinden sollte.

4) $\Delta^3(a^x) = a^x \cdot (a^h-1)^3$,

$$\text{also} \quad \Sigma^3(a^x) = \frac{a^x}{(a^h-1)^3} + \frac{C}{h}\Sigma x + C_1 \cdot \frac{x}{h} + C_2;$$

endlich allgemein:

5) $\Delta^n(a^x) = a^x \cdot (a^h-1)^n$,

$$\text{also} \quad \Sigma^n(a^x) = \frac{a^x}{(a^h-1)^n}$$

$$+ \frac{1}{h}(C\Sigma^{n-2}x + C_1\Sigma^{n-3}x + C_2\Sigma^{n-4}x + \cdots + C_{n-2}x + C_{n-1}),$$

wenn nur C, C_1, C_2, ... C_{n-2}, C_{n-1} ganz willkührliche (periodische) Konstanten vorstellen, deren Anzahl $= n$ ist.

Ferner findet sich

6) $\Delta(a^{mx}) = a^{mx} \cdot (a^{mh}-1)$,

$$\text{also} \quad \Sigma(a^{mx}) = \frac{a^{mx}}{a^{mh}-1} + C,$$

wenn Δ und Σ diejenigen sind, welche zu dem Zuwachse $\Delta x = h$ von x gehören.

Endlich ist noch (für $\Delta x = h$)

7) $\Delta(a^{px+q}) = a^{px+q}(a^{ph}-1)$,

$$\text{also} \quad \Sigma(a^{px+q}) = \frac{a^{px+q}}{a^{ph}-1}.$$

§. 58.

Unter den Differenzen und Summen, welche sich noch leicht finden lassen, heben wir hier noch folgende hervor:

A. Ist m eine positive oder negative ganze Zahl, so ist

1) $\Delta(x^{m|h}) = mh \cdot (x+h)^{m-1|h}$,

$$\text{also} \quad \Sigma(x^{m|h}) = \frac{(x-h)^{m+1|h}}{(m+1)h};$$

2) $\Delta^2(x^{m|h}) = m^{2|-1}h^2 \cdot (x+2h)^{(m-2)|h}$

$$\text{und} \quad \Sigma^2(x^{m|h}) = \frac{(x-2h)^{(m+2)|h}}{(m+2)^{2|-1} \cdot h^2};$$

3) $\Delta^3(x^{m|h}) = m^{3|-1}h^3 \cdot (x+3h)^{(m-3)h}$

und $\Sigma^3(x^{m|h}) = \frac{(x-3h)^{(m+3)h}}{(m+3)^{3|-1} \cdot h^3}$;

und allgemein

I. $\Delta^n(x^{m|h}) = m^{n|-1}h^n \cdot (x+nh)^{(m-n)|h}$

und $\Sigma^n(x^{m|h}) = \frac{(x-nh)^{(m+n)|h}}{(m+n)^{n|-1} \cdot h^n}$,

wenn erstlich alle Δ und Σ sich auf $\Delta x = h$ beziehen, und wenn in den Summengleichungen, zur Rechten derselben, noch die von den willkührlichen periodischen Konstanten herrührenden Glieder hinzugedacht werden, wie solche in den Formeln des §. 57. **hinzugeschrieben** sich finden.

Und gerade so findet sich nach und nach noch zu $\Delta x = h$,

II. $\Delta^n(x^{m|-h}) = m^{n|-1}h^n \cdot x^{(m-n)|-h}$

und $\Sigma^n(x^{m|-h}) = \frac{x^{(m+n)|-h}}{(m+n)^{n|-1} \cdot h^n}$,

wenn zuletzt noch die Glieder mit den n willkührlichen periodischen Konstanten hinzutreten.

Zufolge dieser Formeln sind aber die Differenzen und Summen gewisser Binomial-Koeffizienten, immer selbst wieder solche Binomial-Koeffizienten, nämlich:

III. $\Delta^n\left(\frac{x}{h}\right)_m = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-n}$ und $\Sigma^n\left(\frac{x}{h}\right)_m = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+n}$,

welche Resultate namentlich für $\Delta x = h = 1$ interessant sind; unter dieser letzteren Voraussetzung werden nämlich die Formeln I.—III. noch einfacher und namentlich die letztere (für $\Delta x = 1$) so:

IV. $\Delta^n(x_m) = x_{m-n}$ und $\Sigma^n(x_m) = x_{m+n}$,

wenn x_m, x_{m-n} und x_{m+n} Binomial-Koeffizienten vorstellen.

Immer aber müssen zu $\Sigma^n f_x$ allemal noch n Glieder mit n (periodischen) Konstanten hinzugefügt werden, nämlich die Glieder

$C \cdot \Sigma^{n-1}(x) + C_1 \cdot \Sigma^{n-2}(x) + C_2 \cdot \Sigma^{n-3}(x) + \cdots + C_{n-2} \cdot \Sigma(x) + C_{n-1}$,

während diese Summen von x (nämlich $\Sigma(x)$, $\Sigma(x^2)$, $\Sigma(x^3)$, ꝛc. ꝛc.) später noch gefunden werden sollen.

§. 59.

Für die trigonometrischen Funktionen findet man:

1) $\Delta(Sin\,x) = 2\,Sin\,\tfrac{1}{2}h \cdot Cos(x+\tfrac{1}{2}h)$,

$$\text{also}\quad \Sigma(Cos\,x) = \frac{Sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\,Sin\,\frac{1}{2}h}.$$

2) $\Delta(Cos\,x) = -2\,Sin\,\tfrac{1}{2}h \cdot Sin(x+\tfrac{1}{2}h)$,

$$\text{also}\quad \Sigma(Sin\,x) = \frac{-Cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\,Sin\,\frac{1}{2}h}.$$

Und nimmt man hiervon nach und nach die weiteren Differenzen und die weiteren Summen, so erhält man noch

$$\text{I.}\ \begin{cases} \Delta^{2n}(Sin\,x) = (-1)^n \cdot 2^{2n}(Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n} \cdot Sin(x+nh), \\ \Delta^{2n+1}(Sin\,x) = (-1)^n \cdot 2^{2n+1}(Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n+1} \cdot Cos(x+(n+\frac{1}{2})h). \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} \Delta^{2n}(Cos\,x) = (-1)^n \cdot 2^{2n}(Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n} \cdot Cos(x+nh), \\ \Delta^{2n+1}(Cos\,x) = (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+1}(Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n+1} \cdot Sin(x+(n+\frac{1}{2})h). \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} \Sigma^{2n}(Sin\,x) = (-1)^n \cdot \dfrac{Sin(x-nh)}{2^{2n} \cdot (Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n}}, \\ \Sigma^{2n+1}(Sin\,x) = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{Cos(x-(n+\frac{1}{2})h)}{2^{2n+1} \cdot (Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n+1}}. \end{cases}$$

$$\text{IV.}\ \begin{cases} \Sigma^{2n}(Cos\,x) = (-1)^n \cdot \dfrac{Cos(x-nh)}{2^{2n} \cdot (Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n}}, \\ \Sigma^{2n+1}(Cos\,x) = (-1)^n \cdot \dfrac{Sin(x-(n+\frac{1}{2})h)}{2^{2n+1} \cdot (Sin\,\frac{1}{2}h)^{2n+1}}. \end{cases}$$

Anmerkg. Ist aber $\Delta f_x = \varphi_x$, so ist allemal auch $\Delta(f_{x+a}) = \varphi_{x+a}$, wo a selbst noch h oder Δx, enthalten kann.

§. 60.

Man findet sehr leicht, weil $\Delta(x^m) = (x+h)^m - x^m$ ist, nach dem binomischen Lehrsatze

I. $\Delta(x^m) = S[m_{a+1} \cdot x^{m-a-1} \cdot h^{a+1}]$

und diese Reihe hat m Glieder, so oft m positiv ganz ist, während sie in allen übrigen Fällen eine unendliche ist. — Dieselbe Gleichung ist ein besonderer Fall der noch allgemeineren Gleichung, welche der Taylor'sche Lehrsatz giebt (in so ferne $\Delta f_x = f_{x+h} - f_x$ ist), nämlich

$$\text{II.} \qquad \Delta f_x = S\left[\partial^{1+a} f_x \cdot \frac{h^{1+a}}{(1+a)!}\right],$$

welche Reihe zur Rechten ebenfalls eine endliche, von h bis zu h^m fortgehende seyn wird, so oft f_x eine ganze Funktion von x vom m^{ten} Grade ist (weil dann $\partial^{a+1} f_x = 0$ wird, so oft $a+1>m$ ist), während in allen übrigen Fällen die Reihe eine unendliche seyn muß, in welcher aber, wenn f_x selbst noch h enthält,

---

*) Da der Taylor'sche Lehrsatz symbolisch auch so geschrieben werden kann, nämlich

$f_{x+h} = e^{\partial \cdot h} \cdot f_x$, wenn man unter $e^{\partial \cdot h}$ die unendliche Reihe $1+\partial \cdot h + \partial^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$ versteht, und statt der Multiplikation mit f_x sich bloß denkt, daß f_x an die ∂, ∂^2, ∂^3 noch angehängt wird, — so kann man die Formel II. symbolisch offenbar auch so schreiben, nämlich

$$1) \qquad \Delta f_x = (e^{\partial \cdot h} - 1) \cdot f_x.$$

Aus dieser Gleichung 1.) hat man nun mehrere Folgerungen gezogen. Indem man in sie erstlich Δf_x, $\Delta^2 f_x$, ... $\Delta^{n-1} f_x$ statt f_x setzte und aus allen Gleichungen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, ... $\Delta^{n-1} f_x$ eliminirte, erhielt man

$$2) \qquad \Delta^n f_x = (e^{\partial \cdot h} - 1)^n \cdot f_x,$$

welche Gleichung lehrt, daß man die unendliche, nach Potenzen von h fortlaufende Reihe $e^{\partial \cdot h} - 1$ zur n^{ten} Potenz erheben, das Resultat wiederum nach h ordnen und dann die Multiplikation mit f_x wieder symbolisch, wie kurz vorher gesagt, ausführen müsse, wenn man $\Delta^n f_x$ nach Potenzen von h geordnet entwickelt sehen wolle.

Aus der Gleichung 1.) d. h. aus der Gleichung

$$\Delta f_x = e^{\partial \cdot h} f_x - f_x$$

die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von h, selbst noch h enthalten können und werden.

Enthält aber die Funktion f_x kein h, so ist die Reihe bereits nach h geordnet.

---

hat man aber noch ferner gefolgert

$$f_x+\Delta f_x = e^{\partial\cdot h}f_x \quad \text{d. h.} \quad (1+\Delta)f_x = e^{\partial\cdot h}f_x;$$

daraus aber $\partial\cdot h = log(1+\Delta)$ und dann, indem man mit f_x der Form nach multiplicirte,

$$3) \quad \partial f_x\cdot h = log(1+\Delta)\cdot f_x$$
$$= \Delta f_x - \frac{1}{2}\Delta^2 f_x + \frac{1}{3}\Delta^3 f_x - \frac{1}{4}\Delta^4 f_x + \cdots.$$

Ja, man setzte nun in diese Gleichung 3.) nach und nach ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ... $\partial^{n-1} f_x$ statt f_x und eliminirte aus allen Gleichungen die Ausdrücke ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ... $\partial^{n-1} f_x$, und man erhielt

$$4) \quad \partial^n f_x\cdot h^n = [log(1+\Delta)]^n\cdot f_x,$$

wo der Ausdruck zur Rechten so zu verstehen ist, daß man die Reihe $\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots$ zur n^{ten} Potenz erheben, diese Potenz wiederum nach Δ ordnen, dann aber an alle Glieder hinter Δ, Δ^2, Δ^3, ꝛc. noch f_x anhängen soll.

So richtig aber diese Resultate seyn mögen, so wenig Vertrauen darf man, namentlich was die N.N. 3. u. 4. betrifft, auf diese Herleitung derselben setzen, und so sorgfältig muß man in den Anwendungen derselben seyn, auch wenn sie sich auf anderen Wegen als richtig ausweisen sollten.

Die Reihen in 3. und in 4. zur Rechten nämlich, wenn sie auch richtig seyn sollten, würden doch nach Potenzen irgend eines Fortschreitungs-Buchstaben nicht fortlaufen, also des Charakters allgemeiner unendlicher Reihen entbehren; also müßten diese Reihen als numerische und convergente angesehen werden, wenn nicht als allgemeine endliche Reihen, zu denen, wo man sie abgebrochen sich denkt, noch bestimmte Ergänzungsglieder hinzukommen müssen.

Man kann sich daher einer solchen symbolischen Rechnungsweise zwar bedienen, um zu Resultaten zu gelangen, welche möglicher Weise richtig seyn können; man muß aber dann nie unterlassen, diese Resultate auf andern Wegen noch zu prüfen, und nachzusehen, ob, und dann noch wie weit und unter welchen Voraussetzungen sie gültig sind und angewandt werden dürfen.

Aus der Gleichung II., wenn man Δf_x statt f_x, nachher aber rechts statt Δf_x wieder seinen Werth aus IV. setzt, folgt sogleich noch

$$\text{III.}\quad \Delta^2 f_x = S\left[\mathfrak{d}^{2+\mathfrak{p}} f_x \cdot \frac{h^{2+\mathfrak{p}}}{(1+\mathfrak{a})!\,(1+\mathfrak{b})!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{p}},$$

in so ferne, so wie statt Δf_x sein Werth aus II. gesetzt wird,

$$\mathfrak{d}^{\mathfrak{a}+1}(\Delta f_x) = S\left[\mathfrak{d}^{\mathfrak{a}+1}(\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}+1} f_x)_x \cdot \frac{h^{\mathfrak{b}+1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\right]$$

sich ergiebt.

Eben so findet man nun weiter

$$\text{III.}\quad \Delta^3 f_x = S\left[\mathfrak{d}^{3+\mathfrak{p}} f_x \cdot \frac{h^{3+\mathfrak{p}}}{(1+\mathfrak{a})!\,(1+\mathfrak{b})!\,(1+\mathfrak{c})!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{p}}$$

und allgemein

$$\text{IV.}\quad \Delta^n f_x = S\left[\mathfrak{d}^{n+\mathfrak{p}} f_x \cdot \frac{h^{n+\mathfrak{p}}}{(1+\mathfrak{a})!\,(1+\mathfrak{b})!\,(1+\mathfrak{c})!\cdots(1+\mathfrak{n})!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{n}=\mathfrak{p}},$$

wo die Anzahl der Faktoren im Nenner $= n$ ist.

Hat man aber gefunden, daß $\Delta^n f_x$ sich in eine Reihe entwickeln läßt, welche mit dem Gliede h^n beginnt, daß also

$$\Delta^n f_x = S[k_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{d}^{n+\mathfrak{p}} f_x \cdot h^{n+\mathfrak{p}}]$$

ist, so kann man die Koeffizienten k_0, k_1, k_2, 2c. 2c. auch dadurch leicht finden, daß man e^x statt f_x setzt, weil $\Delta^n(e^x) = e^x \cdot (e^h - 1)^n$ und $\mathfrak{d}^{n+\mathfrak{p}}(e^x) = e^x$ wird. Die vorstehende Gleichung geht dadurch über in

$$(e^h - 1)^n = S[k_{\mathfrak{p}} \cdot h^{n+\mathfrak{p}}],$$

so daß man sich überzeugt, daß die Koeffizienten $k_{\mathfrak{p}}$ keine anderen sind, als die der Entwickelung von $(e^z - 1)^n$ nach Potenzen von z. Dadurch ist aber außer Zweifel gesetzt, einmal, daß die Gleichung IV. symbolisch auch so geschrieben werden kann:

$$\text{V.}\quad \Delta^n f_x = (e^{\mathfrak{d} \cdot h} - 1)^n \cdot f_x$$

in dem Sinne der voranstehenden Note; und dann noch, daß auch

$$\text{VI.}\quad (e^z-1)^n = S\left[\frac{z^{n+p}}{(1+a)!\,(1+b)!\,(1+c)!\cdots(1+n)!}\right]_{a+b+c+\cdots+n=p}$$

seyn muß, wo der Nenner rechts n Faktoren hat, während n positiv ganz vorausgesetzt worden ist.

Weil aber auch nach dem binomischen Lehrsatze

$$(e^z-1)^n = S[(-1)^a\cdot n_a\cdot e^{(n-a)z}]$$

und wiederum für jeden bestimmten Werth von a

$$e^{(n-a)z} = S\left[\frac{(n-a)^b\cdot z^b}{b!}\right],$$

also

$$\text{VII.}\quad (e^z-1)^n = S\left[(-1)^a\cdot n_a\cdot\frac{(n-a)^b}{b!}\cdot z^b\right]$$

ist, so folgt aus der Vergleichung von VI. u. VII. mit einander noch (weil die Koeffizienten von z^ν in beiden Entwickelungen einander gleich seyn müssen)

$$\text{VIII.}\begin{cases} S[(-1)^a\cdot n_a\cdot(n-a)^\nu] = 0, & \text{wenn } \nu<n,\\ \text{dieselbe Reihe} = \nu!, & \text{wenn } \nu=n,\\ \left.\begin{array}{l}\text{dieselbe Reihe aber}\\ \text{so oft } \nu>n \text{ ist}\end{array}\right\} = S\left[\frac{\nu!}{(1+a)!\,(1+b)!\cdots(1+n)!}\right]_{a+b+c+\cdots+n=\nu-n}, \end{cases}$$

wo in dem Nenner zur Rechten, n Faktoren vorkommen, während n positiv ganz gedacht ist, und die Reihe zur Linken n Glieder hat.

Weil aber in der Gleichung VII. die Koeffizienten von z^b alle $=0$ seyn müssen, so lange $b<n$ ist, so kann man in ihr überall $n+p$ statt b schreiben, und dadurch geht die Gleichung V. auch noch über in

$$\text{IX.}\quad \Delta^n f_x = S\left[(-1)^a\cdot n_a\cdot(n-a)^{n+p}\cdot\partial^{n+p}f_x\cdot\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}\right].$$

Anmerkg. Ehe wir in diesen Untersuchungen weiter gehen, wollen wir erst einige Anwendungen nachweisen.

§. 61.

Diese Reihen zur Rechten in dem vorhergehenden §. 60. sind endliche, allemal und nur dann, wenn die Funktion f_x eine algebraische ganze rationale Funktion ist. Ist sie nämlich vom m^{ten} Grade, so ist ∂f_x vom $(m-1)^{ten}$ Grade, $\partial^2 f_x$ vom $(m-2)^{ten}$ Grade u. s. w. f.; — endlich ist dann $\partial^m f_x$ vom nullten Grade oder constant, und alle folgenden Differenzial-Koeffizienten werden Null. Daraus und aus den Formeln IV. oder IX. des §. 60. geht aber hervor, daß dann $\Delta^m f_x$ constant und $\Delta^n f_x = 0$ ist, so oft $n > m$. Und daraus wieder geht (in Verbindung mit §. 51.) hervor:

„daß die aus einer solchen algebraischen rationalen gan-
„zen Funktion von x vom m^{ten} Grade, hervorgehen-
„den Glieder

$$\ldots, \quad f_{x-2h}, \quad f_{x-h}, \quad f_x, \quad f_{x+h}, \quad f_{x+2h}, \quad f_{x+3h}, \quad \ldots$$

„für jeden Werth von h eine Ur-Reihe bilden, deren
„m^{te} Differenz-Reihe lauter konstante Glieder hat, und
„deren folgende Differenz-Reihen lauter Nullen zu Glie-
„dern enthalten, und daß die algebraische rationale
„Funktion die einzige ist, welcher diese Eigenschaft zu-
„kommt."

Solche Ur-Reihen, deren m^{te} Differenz-Reihen konstant sind, nennt man arithmetische Reihen der m^{ten} Ordnung (zu denen auch die zu Anfang des 2ten Theils dieses Werkes betrachteten figurirten Reihen gehören). — Die gemeine arithmetische Reihe, deren erste Differenz-Reihe schon konstante Glieder hat, ist also eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, und sie entspringt allemal aus einer Funktion $Ax+B$ vom ersten Grade, indem wir statt x setzen

$$\ldots, \quad x-2h, \quad x-h, \quad x, \quad x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \quad \ldots$$

und dabei h ganz willkührlich (also auch $=1$) nehmen, während unter x ein ganz bestimmter und beliebiger Werth gedacht werden kann, namentlich aber auch 0 oder irgend eine ganze Zahl.

§. 62.

Ist die algebraische ganze Funktion f_x von der m^{ten} Ordnung, ist also die aus ihr hervorgegangene Ur-Reihe

$$\cdots\ u_{n-m-2},\ u_{n-m-1},\ u_{n-m},\ u_{n-m+1}, \cdots u_n, \cdots$$

eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung, so sind die Glieder ihrer $(m+1)^{ten}$ Differenz-Reihe alle $= 0$, und da diese Glieder nach §. 37. N. 1. gefunden werden, so findet sich also allemal für jeden Werth von n,

$$(u_1-1)^{m+1} \cdot u_{n-m-1} = \Delta^{m+1} u_{n-m-1} = 0,$$

d. h. $$u_n-(m+1)_1 \cdot u_{n-1}+(m+1)_2 \cdot u_{n-2}+ \cdots \pm(m+1)_{m+1} \cdot u_{n-m-1} = 0,$$

durch welche Gleichung jedes n^{te} Glied einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung in die $(m+1)$ nächst vorhergehenden Glieder derselben Reihe ausgedrückt sich sieht.

Ist die arithmetische Reihe von der ersten Ordnung, also die gemeine arithmetische Reihe, so hat man demnach allemal für jeden Werth von n

$$u_n-2u_{n-1}+u_{n-2} = 0.$$

(Vgl. Anmerkg. zu §. 22.).

Anmerkg. 1. Unter den ganzen Funktionen der m^{ten} Ordnung ist x^m die allereinfachste; aus ihr gehen hervor die Ur-Reihen

$$\cdots,\ (x-2h)^m,\ (x-h)^m,\ x^m,\ (x+h)^m,\ (x+2h)^m,\ \cdots$$

und (für $h = 1$)

$$\cdots,\ (x-2)^m,\ (x-1)^m,\ x^m,\ (x+1)^m,\ (x+2)^m,\ (x+3)^m,\ \cdots$$

und dies sind wiederum die m^{ten} Potenzen aller ganzen Zahlen, wenn man statt x irgend eine ganze Zahl setzt.

So erklärt sich's, warum bei der Reihe der Quadratzahlen die 2te Differenz-Reihe schon konstante Glieder bekommt, bei der Reihe der Kubikzahlen aber erst die 3te Differenz-Reihe, — eben weil die m^{ten} Potenzen aller ganzen Zahlen eine arithmetische

Reihe der m^{ten} Ordnung bilden, deren m^{te} Differenz-Reihe erst lauter konstante Glieder hat.

Anmerkg. 2. Die n^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung, bilden eine arithmetische Reihe der mn^{ten} Ordnung, weil die n^{te} Potenz einer ganzen Funktion f_x vom m^{ten} Grade, eine ganze Funktion vom mn^{ten} Grade liefert.

Daher bilden auch die n^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der 1ten Ordnung, eine arithmetische Reihe der $n \cdot 1$ d. h. der n^{ten} Ordnung, welches wiederum dasselbe ist, was in der Anmerkg. 1. steht

§. 63.

Die Formel §. 37. N. 2., wenn die Ur-Reihe eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung ist, so daß
$\Delta^{m+1} u_r = \Delta^{m+2} u_r = \text{etc. etc.} = 0$ wird, — kann dann auch so geschrieben werden, nämlich

$$(\odot) \cdots \quad u_{r+n} = u_r + n_1 \cdot \Delta u_r + n_2 \cdot \Delta^2 u_r + \cdots n_m \cdot \Delta^m u_r$$

oder

$$(☾) \cdots \quad u_{r+n} - u_r = n_1 \cdot \Delta u_r + n_2 \cdot \Delta^2 u_r + \cdots + n_m \cdot \Delta^m u_r.$$

Nimmt man nun die erste Summen-Reihe dieser arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung, so hat man offenbar eine arithmetische Reihe der $(m+1)^{ten}$ Ordnung, weil erst ihre $(m+1)^{te}$ Differenz-Reihe konstante Glieder bekommt. Wendet man also die Formel (☾) auf diese neue arithmetische Reihe der $(m+1)^{ten}$ Ordnung an, (indem man überall $\Delta^{-1} u_s$ statt u_s und $m+1$ statt m schreibt), so erhält man

$$(♀) \cdots \quad \Delta^{-1} u_{r+n} - \Delta^{-1} u_r = n_1 \cdot u_r + n_2 \cdot \Delta u_r + \cdots + n_{m+1} \cdot \Delta^m u_r,$$

während nach §. 36. N. 3. (oder nach Anmerkg. 1. zu §. 38. Nr. a.) der Ausdruck zur Linken nichts weiter ist als die Summe der n nächst auf einander folgenden Glieder
$u_r + u_{r+1} + \cdots + u_{r+n-1}$ der arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung. Die Formel (♀) lehrt also: die Summe von n, d. h.

von noch so vielen Gliedern einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung nur in $m+1$ Glieder auszudrücken *).

Anmerkg. Auf diesem Wege können also auch die figurirten Reihen summirt werden, deren Summen bereits zu Anfange des 2ten Theils dieses Werkes gefunden worden sind, dort auf anderem Wege **).

§. 64.

Wir wollen jetzt nur noch an einem Beispiel zeigen, wie diese Theorie der arithmetischen Reihen der höheren Ordnung zum Bau von Tabellen benutzt werden kann.

Es ist bekanntlich

$$log(r+x) = log\,r + log\left(1+\frac{x}{r}\right)$$

d. h. $$log(r+x) = log\,r + \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} - \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{r^4} + \cdots,$$

so daß man in den Fällen, wo r sehr groß und x nicht zu groß gedacht wird, wo also $\frac{x}{r}$ sehr klein ist, und wo man nur Näherungs-Werthe haben will, die höheren Potenzen von $\frac{x}{r}$

---

*) Auf diese Weise findet sich die Summe der n ersten Quadratzahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \cdots,$$

(weil $u_r = 1$, $\Delta u_r = 3$, $\Delta^2 u_r = 2$ ist)

$$= n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 3 + n_3 \cdot 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Eben so findet sich die Summe der n ersten Kubikzahlen

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ \cdots$$

(weil hier $u_r = 1$, $\Delta u_r = 7$, $\Delta^2 u_r = 12$, $\Delta^3 u_r = 6$ ist)

$$= n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 7 + n_3 \cdot 12 + n_4 \cdot 6 = \left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right]^2$$

so daß letztere Summe [illegible]tzahl ist.

**) Die Summ[illegible]n lassen sich auch leicht nach §. 54. N. 4. finden, we[illegible] §. 58. in Anwendung bringt.

außer Acht lassen kann. Darum kann man unter den gemachten Voraussetzungen $log(r+x)$ als eine ganze Funktion von x vom 2ten, 3ten, 4ten Grade ansehen, je nachdem man bereits $\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3}$, oder erst $\frac{1}{4}\frac{x^4}{r^4}$, oder erst $\frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5}$ (nebst allen folgenden Gliedern) außer Acht lassen will.

Also kann man, wenn r sehr groß ist, in einem nicht zu großen Umfange der Werthe von x, die Logarithmen

$$log\,r,\quad log(r+1),\quad log(r+2),\quad log(r+3),\quad log(r+4),\ \cdots$$

so ansehen, als bildeten sie eine arithmetische Reihe, deren 2ten, oder 3ten, oder 4ten, rc. Differenz-Reihen bereits konstante Glieder haben; so daß die Glieder der folgenden Differenz bereits als verschwindend betrachtet werden; und daher kann man auch aus den bekannten ersten Gliedern der Differenz-Reihen und dem ersten Gliede $log\,r$ der Ur-Reihe die übrigen Glieder der Differenz-Reihen, und die übrigen Glieder der Ur-Reihe, nämlich $log(r+1)$, $log(r+2)$, $log(r+3)$, rc. rc. bis zu $log(r+n)$ hin (wenn n nicht zu groß ist), durch bloße einfache Addition zusammensetzen, wie wir dies in der Vorerinnerung zum 4ten Kapitel für die Bildung der Quadrat- und Kubikzahlen-Tabellen gezeigt haben.

Ganz ähnliche Bemerkungen lassen sich auch für $Sin(r+x)$ und $Cos(r+x)$ machen, nur daß es da von dem absoluten Werthe von x allein abhängt, wie viele Glieder der nach x fortlaufenden Reihen man beibehalten muß, um die verlangte Genauigkeit zu erreichen. Also kann man ebenfalls (bei näherungsweisen Rechnungen) annehmen, daß

$$Sin\,r,\quad Sin(r+h),\quad Sin(r+2h),\ \cdots\ Sin(r+\nu h)$$

und

$$Cos\,r,\quad Cos(r+h),\quad Cos(r+2h),\ \cdots\ Cos(r+\nu h)$$

so lange $\nu h = x$ noch klein genug ist, arithmetische Reihen einer höheren Ordnung sind, daher konstante Differenz-Reihen haben, so daß die Glieder der folgenden Differenz-Reihen als

verschwindend angesehen werden. Man kann daher auch bei diesen Reihen, aus den konstanten Gliedern der letzten Differenz-Reihe, rückwärts gehend (die ersten Glieder der vorhergehenden Differenz-Reihen und der Ur-Reihe zu Hilfe nehmend) nach und nach die voranstehenden Differenz-Reihen und zuletzt die Ur-Reihe (also die Werthe der Sinus und Cosinus) durch bloße Addition zusammensetzen, und zwar von Strecke zu Strecke.

§. 65.

Eine zweite Abschweifung, welche wir uns hier noch erlauben wollen, ist folgende:

1) Die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, ... werden erste, zweite, dritte, rc. Differenzialien genannt, sobald $\Delta x = h$ unendlich-klein gedacht wird, in welchem Falle wir gewöhnlich dx statt Δx und df_x, $d^2 f_x$, $d^3 f_x$, rc. rc. statt bezüglich Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, rc. rc. schreiben, wobei wir aber sorgfältigst die aufrecht stehenden d von den runden ∂ unterscheiden müssen, weil wir unter letzteren stets Operationszeichen verstehen.

2) Die Gleichungen IV. oder IX. des §. 60. geben uns:

$$d^n f_x = \partial^n f_x \cdot dx^n + k_1 \cdot \partial^{n+1} f_x \cdot dx^{n+1} + k_2 \cdot \partial^{n+2} f_x \cdot dx^{n+2} + \cdots$$

und da (nach Einleitg. §. 17.) die Reihe zur Rechten ein Unendlich-Kleines der n^{ten} Ordnung ist, so ist auch $d^n f_x$ unendlich-klein von der n^{ten} Ordnung.

3) Und da in Gleichungen zwischen Unendlich-Kleinen verschiedener Ordnungen, alle die Glieder von einerlei, also auch alle Glieder von der niedrigsten Ordnung des Unendlich-Kleinen für sich eine Gleichung bilden (nach Einleitg. §. 18.), so kann man, wenn auf letztere Gleichung allein Bezug genommen wird, auch bloß

$$d^n f_x = \partial^n f_x \cdot dx^n,$$

also

$$df_x = \partial f_x \cdot dx, \quad d^2 f_x = \partial^2 f_x \cdot dx^2, \quad d^3 f_x = \partial^3 f_x \cdot dx^3, \text{ rc. rc.}$$

setzen, so daß dann auch der n^{te} Differenzial-Koeffizient $\partial^n f_x$ (d. h. diejenige Funktion von x, welche aus der Funktion f_x durch eine Reihe auf einander folgender Operationen gefunden wird) den Werth des Differenzial-Quotienten $\frac{d^n f_x}{dx^n}$ ausdrückt (d. h. des Quotienten aus dem unendlich-kleinen Zuwachs $d^n f_x$, den das unendlich-kleine Differenzial $d^{n-1} f_x$ der $(n-1)^{ten}$ Ordnung erleidet, wenn man auf's neue x in $x+dx$ übergehen läßt, — dividirt durch die n^{te} Potenz des unendlich-kleinen Zuwachses dx).

4) Damit ist auch die mannichfache Uebereinstimmung erklärt, der allgemeinen Formeln, nach denen die Differenzen und Summen gefunden werden, mit den allgemeinen Formeln der Differenzial- und Integralrechnung.

Namentlich bleiben die Formeln §. 56. I.—III. und 1.—3. für Differenzialien und Integrale ganz unverändert, während sich die Formeln IV. u. 4. ebendaselbst nur in so weit ändern, als für $\Delta x = h = dx$, d. h. wenn h unendlich-klein gedacht wird, die Unendlich-Kleinen der höhern (2ten) Ordnung gegen die der niederen (1ten) Ordnung weggelassen werden, im Sinne der vorstehenden N. 3.

Die Formeln des §. 57. geben ganz richtige Resultate der Differenzial- und der Integral-Rechnung, sobald man die höhern Potenzen des unendlich-klein gedachten h, gegen die niedrigeren außer Acht läßt und dx statt h schreibt, so daß z. B.

$$a^h - 1 = h \cdot \log a + \frac{h^2 \cdot (\log a)^2}{2!} + \cdots$$

rechts bloß in $dx \cdot \log a$ übergeht.

Was die Formeln des §. 58. betrifft, wenn man in ihnen h unendlich-klein nimmt, so ist zuvörderst zu bemerken, daß dann $x^{m|\pm h}$ in x^m übergeht, und daß daher die Formeln I. und II. des §. 58. beide in einander und in den Ausdruck des n^{ten} Differenzials der m^{ten} Potenz von x übergehen müssen, was in der That der Fall ist.

Auch die Formeln des §. 59. gehen in bekannte Resultate der Integral-Rechnung über, sobald man $\Delta x = h = dx$ unendlich-klein nimmt; wenn man nur daran denkt, daß dann $Sin\frac{1}{2}dx$ in $\frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\frac{dx^3}{3!} + \cdots$ d. h. in $\frac{1}{2}\cdot dx$ selbst übergeht, während dagegen $Cos\frac{1}{2}dx = 1 - \frac{1}{4}\frac{dx^2}{2!} + \cdots$ d. h. $= 1$ genommen werden muß.

§. 66.

Nach diesen Abschweifungen schließen wir unsere weiteren Untersuchungen wieder an die des §. 60. an.

Da nach §. 60.

1) $\Delta^n f_x = \partial^n f_x \cdot h^n + k_{1,n} \cdot \partial^{n+1} f_x \cdot h^{n+1} + k_{2,n} \cdot \partial^{n+2} f_x \cdot h^{n+2} + \cdots$

gefunden ist, so kann man hier herein statt n nach und nach $n+1$, $n+2$, $n+3$, $\cdots$ setzen, dann die erhaltenen Gleichungen bezüglich mit den unbestimmten Faktoren C_1, C_2, C_3, C_4, rc. rc. multipliciren, alle Gleichungen zuletzt addiren und nun die unbestimmten Koeffizienten C_1, C_2, C_3, rc. rc. so nehmen, daß in dem Endresultat zur Rechten die Koeffizienten von h^{n+1}, h^{n+2}, h^{n+3}, rc. rc. bis ins Unendliche fort, der Null gleich werden, um so alle höheren Ableitungen von f_x zu eliminiren; und man wird erhalten:

2) $\partial^n f_x \cdot h^n = \Delta^n f_x + C_1 \cdot \Delta^{n+1} f_x + C_2 \cdot \Delta^{n+2} f_x + C_3 \cdot \Delta^{n+3} f_x + \cdots,$

wo C_1, C_2, C_3, rc. rc. aus den Gleichungen

$$C_1 + k_{1,n} = 0$$
$$C_2 + C_1 \cdot k_{1,n} + k_{2,n} = 0$$
$$C_3 + C_2 \cdot k_{1,n} + C_1 \cdot k_{2,n} + k_{3,n} = 0$$

u. s. w. f.

gefunden werden müssen.

Um diese Koeffizienten näher zu charakterisiren setze man erst allgemein

3) $\partial^n f_x \cdot h^n = S[C_a \cdot \Delta^{n+a} f_x],$

dann aber e^x statt f_x, so ergiebt sich (weil $\partial^n f_x = e^x$ und $\Delta^{n+a} f_x = e^x \cdot (e^h - 1)^{n+a}$ gefunden worden sind),

4) $h^n = S[C_a \cdot (e^h - 1)^{n+a}]$,

oder, wenn $e^h - 1 = z$, folglich $h = log(1+z)$ gesetzt wird,

5) $[log(1+z)]^n = S[C_a \cdot z^{n+a}]$,

so daß man also die zur N. 1. gehörigen unbestimmten Koeffizienten C_a, d. h. C_0, C_1, C_2, C_3, ꝛc. ꝛc. erhält, wenn man den $log(1+z)$ d. h. die unendliche Reihe $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 -$ in inf., zur n^{ten} Potenz erhebt, und letztere wieder nach den ganzen steigenden Potenzen von z ordnet. Deshalb kann man nun die Formel N. 3. auch so schreiben

X. $\partial^n f_x \cdot h^n = [log(1+\Delta)]^n \cdot f_x$,

wenn man sie in dem schon öfter erwähnten symbolischen Sinne nimmt (Vergl. die Note zu §. 60.).

Während also im §. 60. die n^{te} Differenz $\Delta^n f_x$ in die Differenzial-Koeffizienten der Funktion f_x ausgedrückt ist, drückt die vorstehende Formel X. (oder N. 3. in Verbindung mit N. 5.) umgekehrt den n^{ten} Differenzial-Koeffizienten in die Differenzen aus.

Weil aber die Gleichung X. oder N. 2. eine Reihe enthält, die nicht mehr nach Potenzen eines unbestimmten Fortschreitungs-Buchstaben fortläuft, so kann die Reihe zur Rechten nur als eine solche angesehen werden, welche irgend wo abbricht, und zu welcher dann noch ein Ergänzungsglied hinzukommen muß.

Da die nächstfolgenden Paragraphen ein Beispiel enthalten, wie in einem der wichtigsten Probleme ein solches Ergänzungsglied näher bestimmt wird, so wollen wir uns augenblicklich mit dessen bloßen Erwähnung begnügen.

§. 67.

Zu den wichtigsten Fragen der endlichen Summen-Rechnung gehört die Auffindung von Σf_x in Form einer unendlichen Reihe, so oft eine endliche Form nicht existirt. Wir wollen aber

diese Untersuchung erst mit der Auffindung des endlichen Integrals $\Sigma(x^m)$ beginnen, wie solches zu $\Delta x = h$ gehört.

Man geht zu dem Ende aus vom §. 60., nach welchem man hat für $\Delta x = h$

$$\Delta(x^{m+1}) = (m+1)x^m \cdot h + (m+1)_2 \cdot x^{m-1}h^2 + (m+1)_3 \cdot x^{m-2}h^3 + \cdots,$$

nimmt links und rechts das endliche Integral, dividirt durch $(m+1)h$, und findet:

$$\text{I.} \qquad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h}$$
$$-[\tfrac{1}{2}mh \cdot \Sigma(x^{m-1}) + \tfrac{1}{3}m_2h^2 \cdot \Sigma(x^{m-2}) + \tfrac{1}{4}m_3h^3 \cdot \Sigma(x^{m-3}) + \cdots].$$

Wird nun hier herein nach und nach $0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ ꝛc. statt m gesetzt, so erhält man hieraus ohne Weiteres nach und nach

$$\Sigma(x^0) = \Sigma(1) = \frac{x}{h},$$

$$\Sigma(x) = \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \tfrac{1}{2}x,$$

$$\Sigma(x^2) = \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}xh,$$

$$\Sigma(x^3) = \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{h} - \tfrac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 2}x^2h,$$

$$\Sigma(x^4) = \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{h} - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3h - \frac{1}{5 \cdot 6}xh^3,$$

$$\Sigma(x^5) = \tfrac{1}{6}\frac{x^6}{h} - \tfrac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2 \cdot 6}x^4h - \frac{1}{2 \cdot 6}x^2h^3,$$

u. s. w. f.

Der Form nach wird für jede ganze positive Zahl m

$$\text{II.} \quad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h}$$
$$-\tfrac{1}{2}x^m + B_1x^{m-1}h + B_2x^{m-2}h^2 + B_3x^{m-3}h^3 + \cdots,$$

wo die Reihe rechts desto mehr Glieder hat, je größer die positive ganze Zahl m gedacht wird, und wo die Koeffizienten

B_1, B_2, B_3, rc. rc., von x (wie von h) unabhängig und noch gesucht sind.

Um diese unbestimmten Koeffizienten zu finden, nehme man von der Gleichung II. links und rechts die Differenzen, und man findet

$$x^m = x^m + [(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2})m_2 + B_1(m-1)_1]\cdot x^{m-2}$$
$$+[(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2})m_3 + B_1(m-1)_2 + B_2(m-2)_1]\cdot x^{m-3}$$
$$+[(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2})m_4 + B_1(m-1)_3 + B_2(m-2)_2 + B_3(m-3)_1]\cdot x^{m-4}$$

u. s. w. f.

Da nun rechts die einzelnen Koeffizienten von x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, rc. rc. alle der Null gleich seyn müssen, so giebt dies für die Bestimmung eines jeden der Koeffizienten B_1, B_2, B_3, B_4, rc. rc. die Gleichungen, von denen jede folgende einen neuen der Koeffizienten bestimmt. Man findet aber

$B_{2\mu} = 0$ für jede ganze Zahl μ,

und $B_{2\mu-1}$ von der Form $(-1)^{\mu-1}\cdot\mathfrak{B}_{2\mu-1}\cdot\frac{1}{2\mu}\cdot m_{2\mu-1}$,

wo $m_{2\mu-1}$ den Binomial-Koeffizienten $\frac{m^{2\mu-1|-1}}{(2\mu-1)!}$ vorstellt, während $\mathfrak{B}_{2\mu-1}$ eine, auch von m unabhängige Zahl ist.

Man hat daher nun

$$\text{III.}\quad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot m_1 h\cdot x^{m-1}$$
$$-\tfrac{1}{4}\mathfrak{B}_3\cdot m_3 h^3\cdot x^{m-3} + \tfrac{1}{6}\mathfrak{B}_5\cdot m_5 h^5\cdot x^{m-5}$$
$$-\tfrac{1}{8}\mathfrak{B}_7\cdot m_7 h^7\cdot x^{m-7} + \tfrac{1}{10}\mathfrak{B}_9\cdot m_9 h^9\cdot x^{m-9}$$
$$-\text{ rc. rc. rc. } + \text{Constante},$$

wo das letzte Glied vor der Konstante entweder

$\frac{1}{m}\cdot\mathfrak{B}_{m-1}\cdot m_{m-1}h^{m-1}\cdot x$ oder $\frac{1}{m-1}\mathfrak{B}_{m-2}\cdot m_{m-2}h^{m-2}\cdot x^2$

ist, je nachdem man m (positiv ganz und) gerade oder un=

gerade sich denkt, — und wo $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_7$, $\mathfrak{B}_9$, 2c. 2c. positive Zahlen-Koeffizienten sind, und zwar diejenigen, welche man auch die Bernouilli'schen Zahlen nennt, weil Jacob Bernoulli diesen Zahlen (bei einer anderen Gelegenheit, nämlich) als Koeffizienten eines (letzten) Gliedes in den Ausdrücken für die Summen der reciproken Reihen

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots$$

begegnet ist und zuerst auf sie aufmerksam gemacht hat.

Um das Gesetz dieser Bernoulli'schen Zahlen zu finden hat Moivre in der Gleichung III. $x+h$ statt x gesetzt, dann dieselbe Gleichung III. davon subtrahirt, zuletzt aber 0 statt x substituirt, so wie mit h^m wegdividirt und erhalten, so oft m positiv ganz ist,

$$\text{IV.}\quad 0=\frac{1}{m+1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}m_1\cdot\mathfrak{B}_1-\tfrac{1}{4}m_3\cdot\mathfrak{B}_3+\tfrac{1}{6}m_5\cdot\mathfrak{B}_5-\tfrac{1}{8}m_7\cdot\mathfrak{B}_7+\cdots$$

oder

$$0=\frac{1}{m+1}-\tfrac{1}{2}+S\left[(-1)^b\frac{1}{2b+2}m_{2b+1}\mathfrak{B}_{2b+1}\right]_{1+2b\,=\,m-2},$$

während diese Reihe zur Rechten bei dem Gliede abbricht, welches m_{m-1} zum Faktor hat, so oft m gerade, dagegen bei dem mit m_{m-2} affizirten Gliede, wenn m ungerade.

Diese Gleichung liefert nun, wenn nach und nach 2, 4, 6, 8, 2c. 2c. statt m gesetzt wird, die einzelnen Gleichungen, aus denen nach und nach immer eine weitere der Bernoulli'schen Zahlen (in die vorhergehenden ausgedrückt) gefunden wird *).

---

*) Man findet natürlich dieselben Werthe für $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, 2c. 2c. aus derselben Gleichung IV., wenn man statt m die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, 2c. schreibt, sobald man gehörig beachtet, bei welchem Gliede die Reihe rechts abbrechen muß.

Man findet danach in 13 Decimalstellen

$$\mathfrak{B}_1 = \tfrac{1}{6} = 0{,}1666666666666$$
$$\mathfrak{B}_3 = \tfrac{1}{30} = 0{,}0333333333333$$
$$\mathfrak{B}_5 = \tfrac{1}{42} = 0{,}0238095238095$$
$$\mathfrak{B}_7 = \tfrac{1}{30} = 0{,}0333333333333$$
$$\mathfrak{B}_9 = \tfrac{5}{66} = 0{,}0757575757575$$
$$\mathfrak{B}_{11} = \frac{691}{30\cdot 91} = 0{,}2531135531135$$
$$\mathfrak{B}_{13} = 1{,}1666666666666$$
$$\mathfrak{B}_{15} = 7{,}0921568627451$$

u. s. w. f. — Die weiteren Bernoulli'schen Zahlen bis zur 31ten sind in Crelle's Journal für Mathem. vom Jahre 1839 abgedruckt. — Sie sind hier alle positiv gedacht, während man früher unter dem Namen der Bernoulli'schen Zahlen, dieselben Zahlen verstanden hat, aber abwechselnd positiv und negativ genommen.

§. 68.

Ganz auf analoge Weise wird aber auch Σf_x in Form einer Reihe gefunden, die nach Potenzen von h fortläuft. Man geht nämlich von der Gleichung

$$\Delta z_x = z_{x+h} - z_x$$

d. h. nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$(\mathfrak{C})\ldots \quad \Delta z_x = \partial z_x \cdot h + \partial^2 z_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 z_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \partial^4 z_x \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

aus, setzt $\partial z_x = f_x$, so daß $z_x = \int f_x \cdot dx$ wird, und nimmt links und rechts die endliche Summe, während man zuletzt noch durch h dividirt. Man erhält:

$$\text{I.} \quad \Sigma f_x = \frac{1}{h} \cdot \int f \cdot dx + C(\text{onstante})$$
$$- \left[\frac{h}{2!} \cdot \Sigma\partial f_x + \frac{h^2}{3!} \cdot \Sigma\partial^2 f_x + \frac{h^3}{4!} \cdot \Sigma\partial^3 f_x + \cdots \right].$$

Setzt man nun in diese Gleichung nach und nach

∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, rc. rc. statt f_x, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus denen man nach und nach $\Sigma\partial f_x$, $\Sigma\partial^2 f_x$, $\Sigma\partial^3 f_x$, rc. rc. eliminiren kann, so daß man zuletzt Σf_x selbst ausgedrückt erhält.

Die eben angeführte Rechnung macht sich aber am elegantesten, wenn man sie auf die nachstehende Weise ausführt. Man geht vom Taylor'schen Lehrsatze aus, nämlich von der Gleichung

$$1)\quad \Delta z_x = h\cdot\partial z_x + \frac{h^2}{2!}\cdot\partial^2 z_x + \frac{h^3}{3!}\cdot\partial^3 z_x + \frac{h^4}{4!}\cdot\partial^4 z_x + \cdots,$$

setzt hier herein ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$, rc. rc. statt z_x, so daß man erhält

$$2)\quad \Delta\partial z_x = h\cdot\partial^2 z_x + \frac{h^2}{2!}\cdot\partial^3 z_x + \frac{h^3}{3!}\cdot\partial^4 z_x + \cdots$$

$$3)\quad \Delta\partial^2 z_x = h\cdot\partial^3 z_x + \frac{h^2}{2!}\cdot\partial^4 z_x + \cdots$$

$$4)\quad \Delta\partial^3 z_x = h\cdot\partial^4 z_x + \cdots$$

$$5)\quad \Delta\partial^4 z_x = h\cdot\partial^5 z_x + \cdots$$

u. s. w. f.

und eliminirt nun mittelst der Methode der Multiplikatoren. Man multiplicirt zu dem Ende die 2.) mit $A_0 h$, die 3.) mit $A_1 h^2$, die 4.) mit $A_2 h^3$, die 5.) mit $A_3 h^4$, u. s. w. f., addirt alle erhaltenen Gleichungen zu der 1.), setzt die einzelnen Koeffizienten von $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$, $\partial^4 z_x$, rc. rc. zur Rechten der Null gleich und bestimmt aus diesen Gleichungen die Werthe der unbestimmten Faktoren A_0, A_1, A_2, A_3, rc. rc. Man erhält dann

$$6)\quad h\cdot\partial z_x = \Delta z_x + A_0 h\cdot\Delta\partial z_x + A_1 h^2\cdot\Delta\partial^2 z_x + A_2 h^3\cdot\Delta\partial^3 z_x + A_3 h^4\cdot\Delta\partial^4 z_x + \cdots,$$

während die Gleichungen zur Bestimmung von A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, rc. die folgenden sind:

$$7)\quad \begin{cases} A_0+\frac{1}{2!}=0; \\ A_1+\frac{A_0}{2!}+\frac{1}{3!}=0; \\ A_2+\frac{A_1}{2!}+\frac{A_0}{3!}+\frac{1}{4!}=0; \\ A_3+\frac{A_2}{2!}+\frac{A_1}{3!}+\frac{A_0}{4!}+\frac{1}{5!}=0 \end{cases}$$

u. s. w. f.; und allgemein für jede ganze Zahl n

$$S\left[\frac{A_{n-1-a}}{(a+1)!}\right]_{a+b=n}=0, \quad \text{wenn man} \quad A_{-1}=1 \quad \text{sich denkt.}$$

Jede folgende dieser Gleichungen giebt nun einen folgenden dieser unbestimmten Koeffizienten; und zwar wird

$A_0=-\frac{1}{2}$, $A_1=+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!}$, $A_2=0$, $A_3=-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4!}$, $A_4=0$, ꝛc. ꝛc., während die Gleichung 6.), wenn man f_x statt ∂z_x schreibt und links und rechts die endliche Summe (das endliche Integral) nimmt, übergeht in

$$\text{II.} \quad \Sigma f_x=\frac{1}{h}\int f_x\cdot dx-\tfrac{1}{2}f_x+A_1h\cdot\partial f_x+A_2h^2\cdot\partial^2 f_x+A_3h^3\cdot\partial^3 f_x+\cdots.$$

Um aber das Gesetz, nach welchem sich die Koeffizienten richten, bequemer übersehen zu können, darf man nur in dieser Gleichung I. statt f_x irgend eine solche Funktion von x setzen, für welche man Σf_x bereits kennt, also entweder x^m oder e^x, weil Σx^m (aus §. 67. III.) und $\Sigma e^x=\frac{e^x}{e^h-1}$ für $\Delta x=h$, bereits bekannt sind.

Setzt man x^m statt f_x, so wird $\int f\cdot dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\partial f_x=mx^{m-1}$, $\partial^2 f_x=m^{2|-1}x^{m-2}$, $\partial^3 f_x=m^{3|-1}x^{m-3}$, u. s. w.; und vergleicht man die beiden Resultate, das hiesige nnd das Resultat III. des §. 67. mit einander, so findet sich

III. $A_{2a+2} = 0$ und IV. $A_{2a+1} = (-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!}$

für jeden Werth von a, welcher Null oder positiv ganz ist, — so daß (aus II.) sich zuletzt findet:

$$\text{V.}\quad \Sigma f_x = \frac{1}{h}\int f_x \cdot dx - \tfrac{1}{2}f_x + \text{Const.}$$
$$+ S\left[(-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!} \cdot \partial^{2a+1} f_x \cdot h^{2a+1}\right],$$

wo $\mathfrak{B}_{2a+1}$, d. h. $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, ꝛc. ꝛc. die obigen, stets positiv gedachten Bernoulli'schen Zahlen sind, welche aus §. 67. IV. gefunden werden können.

Dieses Gesetz ergiebt sich für den Ausdruck von Σf_x, wenn man in die II. x^m statt f_x substituirt. — Setzt man aber ebendaselbst e^x statt f_x, so daß auch ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. ꝛc. $= e^x$ werden, eben so wie $\int f \cdot dx = e^x$ ist und

$\Sigma f_x = \frac{e^x}{e^h - 1}$, — so geht die Gleichung II. über in

$$\text{VI.}\quad \frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} - \tfrac{1}{2} + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Setzt man nun hier $-h$ statt h und bemerkt man dabei, daß

$$\frac{1}{e^{-h} - 1} = \frac{e^h}{1 - e^h} = \frac{-e^h}{e^h - 1}$$

wird, so hat man

$$\text{VII.}\quad \frac{e^{-h}}{e^h - 1} = -\frac{1}{h} - \tfrac{1}{2} - A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 - A_3 \cdot h^3 + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Addirt man nun die beiden letztern Gleichungen VI. und VII., so ergiebt sich

$$0 = 2A_2 \cdot h^2 + 2A_4 \cdot h^4 + 2A_6 \cdot h^6 + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

woraus, wie oben in III. aber viel anschaulicher hervorgeht, daß

$$A_2 = A_4 = A_6 = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung VI. schreibt sich nun so:

$$h\cdot\left(\frac{1}{e^h-1}+\tfrac{1}{2}\right) = S[A_{2b-1}\cdot h^{2b}], \quad \text{wo} \quad A_{-1} = 1$$

gedacht ist, während A_1, A_3, A_5, A_7, rc. rc. noch gesucht werden. Weil aber

$$e^h-1 = S\left[\frac{h^{a+1}}{(a+1)!}\right]$$

ist, so folgt, wenn man die vorstehende Gleichung damit multiplicirt,

$$h+\tfrac{1}{2}S\left[\frac{h^{a+2}}{(a+1)!}\right] = S\left[\frac{1}{(a+1)!}\cdot A_{2b-1}\cdot h^{a+2b+1}\right].$$

Nimmt man nun hier links und rechts den Koeffizienten von h^{m+1}, wo m jede positive ganze Zahl vorstellt, so giebt dies die Gleichung

$$\text{VIII.}\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m!} = S\left[\frac{1}{(a+1)!}\cdot A_{2b-1}\right]_{a+2b=m} = S\left[\frac{1}{(m+1-2b)!}\cdot A_{2b-1}\right]_{a+2b=m},$$

welche zur Bestimmung der Koeffizienten A_1, A_3, A_5, rc. rc. dient.

Sondert man rechts von der Reihe das erste Glied (für $b=0$) ab (indem man $b=0$ und dann $b+1$ statt b schreibt), so giebt dies, wenn man noch mit $m!$ links und rechts multiplicirt und die Gleichung auf Null bringt,

$$\text{IX.}\quad 0 = \frac{1}{m+1}-\tfrac{1}{2}+S\left[\frac{m!}{(m-1-2b)!}\cdot A_{2b+1}\right]_{a+2b=m-2},$$

aus welcher Gleichung, wenn man statt m nach und nach 2, 4, 6, 8, rc. rc. (oder 3, 5, 7, 9, rc.) setzt, nach und nach die gesuchten Koeffizienten A_1, A_3, A_5, rc. bestimmt werden.

Vergleicht man übrigens diese Gleichung IX. mit der IV. des §. 67. und übersieht man nicht, daß für jeden Werth von b

$$m_{2b+1} = \frac{m^{2b+1|-1}}{(2b+1)!} = \frac{m!}{(2b+1)!\,(m-2b-1)!}$$

ist, so zeigt sich für jeden Werth von b

$$(-1)^{\mathfrak{b}} \cdot \frac{1}{(2\mathfrak{b}+2)!} \cdot \mathfrak{B}_{2\mathfrak{b}+1} = A_{2\mathfrak{b}+1}$$

und dies ist wieder die Gleichung IV. des gegenwärtigen Paragraphen.

Subtrahirt man die VII. von der VI., so ergiebt sich, wenn man noch mit $\frac{1}{2}h$ multiplicirt,

$$\text{X.} \quad \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{e^h+1}{e^h-1} = S[A_{2\mathfrak{b}-1} \cdot h^{2\mathfrak{b}}], \quad \text{weil} \quad A_{-1} = 1.$$

Aus dieser Gleichung, sobald man statt e^h die Reihe $S\left[\frac{h^a}{a!}\right]$ setzt, die Brüche wegschafft und vergleicht, erhält man dieselben Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten A_1, A_3, A_5, 2c. noch einmal.

Denkt man endlich daran, daß, wegen $i^2 = -1$

$$\frac{e^h+1}{e^h-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}h}+e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h}} = -\frac{e^{\frac{1}{2}hi \cdot i}+e^{-\frac{1}{2}hi \cdot i}}{e^{\frac{1}{2}hi \cdot i}-e^{-\frac{1}{2}hi \cdot i}} = i \cdot \frac{Cos(\frac{1}{2}hi)}{Sin(\frac{1}{2}hi)}$$
$$= i \cdot Cotg(\tfrac{1}{2}hi)$$

ist, so folgt noch, wenn man in der Gleichung X. $-hi$ statt h schreibt

$$\text{XI.} \quad \tfrac{1}{2}h \cdot Cotg\,\tfrac{1}{2}h = S\left[A_{2\mathfrak{b}-1} \cdot (-1)^{\mathfrak{b}} \cdot h^{2\mathfrak{b}}\right] = -S\left[\mathfrak{B}_{2\mathfrak{b}-1} \cdot \frac{h^{2\mathfrak{b}}}{(2\mathfrak{b})!}\right]$$

(nach IV.) sobald man unter $\mathfrak{B}_{-1}$ die negative Einheit, d. h. -1 selbst versteht; — und so erklärt es sich, daß die Bernouilli'schen Zahlen auch wieder bei der Entwickelung von $Cotg\,\frac{1}{2}h$ erscheinen.

Setzt man aber in der XI. zuerst $\frac{Cos\,\frac{1}{2}h}{Sin\,\frac{1}{2}h}$ statt $Cotg\,\frac{1}{2}h$ und dann statt der Sinus und Kosinus die Reihen, so ergeben sich, wenn man die Brüche wegschafft, neue Reihen zur Bestimmung der Bernouilli'schen Zahlen.

§. 69.

Die durch die Gleichung IV. des §. 67. (d. h. durch alle die Gleichungen, welche aus dieser hervorgehen, wenn die Zahlen 2, 4, 6, 8, ꝛc. statt m gesetzt werden) definirten Bernoullischen Zahlen wachsen ungemein und so stark, daß für $n = \infty$, die $(n+1)^{te}$ zu ihrer vorhergehenden n^{ten} sich verhält wie $pn^2 : 1$. — Brechen daher die Glieder der Summen-Reihe V. des §. 68. nicht von selbst ab, d. h. ist f_x nicht eine sogenannte ganze Funktion von x (deren Differenzial-Koeffizienten, von einem gewissen ab, alle der Null gleich werden), so kann man fast immer gewärtigen, daß diese Summen-Reihe V. in den Anwendungen als eine divergente unendliche Reihe erscheint, die eben deshalb zu keiner numerischen Rechnung mehr brauchbar ist. — Gauß sagt daher, in der schon einmal angeführten Abhandlung: Disquisit. generales circa seriem etc. etc. pag. 34 vom Jahre 1812: Ceterum negari nequit theoriam talium serierum divergentium adhuc quibusdam difficultatibus premi, de quibus forsan alia occasione pluribus commentabimur. Es ist uns nicht erinnerlich, wo dieses letztere geschehen wäre; aber wir haben bereits im Jahre 1823 nachgewiesen, worin der Grund der Brauchbarkeit der (nach Legendre) sogenannten halb-convergenten Reihen allemal liegt, d. h. derjenigen unendlichen Reihen, welche entschieden divergent sind, die aber, wenn man sie über ein gewisses Glied hinaus nicht gehen läßt, den Werth des Ausdrucks, dem sie angeblich gleich seyn sollen, näherungsweise geben, — und zu denen diese oben gedachte Summen-Reihe in der Regel gehören wird (S. §. 8.).

Jede sogenannte halb-convergente Reihe ist nämlich jedesmal entweder als eine Reihe anzusehen, die nach steigenden und ganzen Potenzen irgend eines Buchstaben z. B. h fortschreitet (entweder noch sichtbar, oder es ist statt h schon ein bestimmter Ziffernwerth gesetzt worden), oder sie ist aus solchen Reihen entstanden. Da man aber jede solche Reihe aus dem Ausdruck F_h, dessen Entwickelung sie ist, mittelst des Maclau-

rin'schen Lehrsatzes entwickeln kann, — so kann man sie abbrechen lassen bei jedem beliebigen n^{ten} Gliede, und — nach Lagrange — dann allemal ein Ergänzungsglied dazu nehmen, welches (nach Einleitg. §. 20.)

$$=\int_{h\div 0}\frac{(h-v)^n}{n!}\partial^{n+1}F_v\cdot dv \quad \text{oder} \quad =\left[\,\partial^{n+1}F\,\right]_{\theta h}\cdot\frac{^{n+1}}{(n+1)!}$$

ist, wo θ zwischen 0 und 1 liegt. — Wenn man nun diese Form der Entwickelung wählt, so entstehen immer nur endliche Reihen, mit einem Ergänzungsgliede, oder mit einer endlichen Summe von Ergänzungsgliedern; und der Werth dieser endlichen Reihe (ohne die Ergänzungsglieder) kommt nun dem entwickelten Ausdrucke desto näher, je kleiner die Summe dieser Ergänzungsglieder wird, was wieder zugleich auch von der Anzahl n der genommenen Glieder mit abhängt. — Es ist dabei bekannt, daß das Lagrange'sche Ergänzungsglied der Maclaurin'schen Reihe, zunächst zwar unbekannt ist, aber allemal zwei Grenzen liefert, zwischen denen es liegt; also wird die eben gedachte Summe der Ergänzungsglieder sehr klein, wenn sowohl die Summe der größern, als auch die Summe der kleinern Grenzen sehr klein wird. — (Daß der Maclaurin'sche Lehrsatz zu gleicher Zeit den Taylor'schen in sich schließe, braucht nicht besonders gesagt zu werden).

Wiederholt man nun die Herstellung der Summen-Formel V. des §. 68. aus dem gegenwärtigen Gesichtspunkte, jedoch so, daß man in den Gleichungen 1—5. 2c. 2c. zur Rechten daselbst, bezüglich n, n—1, n—2, n—3, n—4, 2c. 2c. Glieder nimmt und jedesmal das Ergänzungsglied hinzufügt, so wird man statt der unendlich-vielen Gleichungen, im Ganzen nur n Gleichungen nehmen, so daß die letzte jener Gleichungen 1.—5. 2c. 2c.

I. $\Delta\partial^{n-1}z_x = h\cdot\partial^n z_x+\int_{h\div 0}(h-v)\cdot\partial^{n+1}z_{x+v}\cdot dv$

ist. Die zu den Gleichungen 1.—5. 2c. 2c. zur Rechten hinzukommenden Ergänzungsglieder sind bezüglich

$$\int_{h \div 0} \frac{(h-v)^n}{n!} \cdot \partial^{n+1} z_{x+v} \cdot dv, \quad \int_{h \div 0} \frac{(h-v)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \partial^{n+1} z_{x+v} \cdot dv,$$

$$\int_{h \div 0} \frac{(h-v)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \partial^{n+1} z_{x+v} \cdot dv, \quad \text{2c. 2c.}$$

die bei dem späteren Eliminationsgeschäft bezüglich mit

$$1, \qquad A_0 h, \qquad A_1 h^2, \qquad \text{2c. 2c.}$$

multiplicirt erscheinen, so daß das letzte dieser Ergänzungsglieder in der letzten der Gleichungen 1.—5. 2c. 2c., nämlich in der vorstehenden Gleichung I., mit $A_{n-2}h^{n-1}$ multiplicirt wird. Bei der Addition der entstehenden Gleichungen wird dann die Summe dieser Produkte, das Ergänzungsglied der Gleichung 6.) des §. 68. zur Rechten geben, nachdem letztere ebenfalls zur Rechten mit dem Gliede

$$A_{n-2}h^{n-1} \cdot \Delta \partial^{n-1} z_x$$

abbricht. — Dann ergeben sich genau wieder die Gleichungen 7.) des §. 68. zur Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3, 2c. 2c., nur daß jetzt die Anzahl dieser Gleichungen endlich und $= n-1$ ist, und auch nur die $n-1$ unbekannten Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \cdots A_{n-2}$ enthalten. Man erhält also, wenn noch $A_{-1} = 1$ gedacht wird, zur Bestimmung der $n-1$ Unbekannten $A_0, A_1, A_2, \cdots A_{n-2}$, genau wieder die in

II. $$\left[\frac{A_{m-1-a}}{(a+1)!}\right]_{a+b=m} = 0$$

enthaltenen $n-1$ Gleichungen, indem man statt m nach und nach die Werthe $1, 2, 3, \cdots n-1$ setzt; — woraus nun wieder folgt:

III. $$A_0 = -\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad A_{2a+2} = 0,$$

so wie

IV. $$A_{2a+1} = (-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!},$$

wie groß man auch die Zahl n nehmen möge, wie groß also auch die Zahlen a werden mögen, während $\mathfrak{B}_{2a+1}$ die Bernoulli'schen Zahlen sind.

Die Gleichung V. des §. 68. wird nun, wenn man die Zahl n gerade und $= 2\mu$ nimmt, so aussehen

$$\text{V.}\quad \Sigma f_x = \frac{1}{h}\int f\cdot dx - \tfrac{1}{2}f_x$$
$$+\frac{\mathfrak{B}_1}{2!}h\cdot\partial f_x - \frac{\mathfrak{B}_3}{4!}h^3\cdot\partial^3 f_x + \frac{\mathfrak{B}_5}{6!}h^5\cdot\partial^5 f_x - \frac{\mathfrak{B}_7}{8!}h^7\cdot\partial^7 f_x$$
$$+\cdots+(-1)^\mu\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-3}}{(2\mu-2)!}h^{2\mu-3}\cdot\partial^{2\mu-3}f_x - \frac{1}{h}\cdot\Sigma E_x,$$

wo das Ergänzungsglied E_x gegeben ist durch die Gleichung

$$\text{VI.}\quad E_x = \int_{h\div 0}\partial^{2\mu}f_{x+v}\cdot\psi_{h-v}\cdot dv,$$

wenn die Reihe

$$\text{VII.}\quad S\left[A_{a-1}\cdot\frac{h^a\cdot w^{2\mu-a}}{(2\mu-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} = \psi_w$$

gesetzt wird, in so ferne dieses Glied E_x die Summe von den oben erwähnten n oder 2μ einzelnen Ergänzungsgliedern seyn muß.

Aus der Gleichung VI. folgt nun (nach Einleitg. §. 20.)

$$\text{VIII.}\quad E_x = \psi_{\theta h}\cdot\Delta\partial^{2\mu-1}f_x \quad \text{für} \quad \Delta x = h,$$

wenn vorausgesetzt wird, daß $\partial^{2\mu}f_{x+v}$ von $v=0$ bis $v=h$, immer ein und dasselbe Vorzeichen behält*), wobei θ zwischen 0 und 1 liegt, — oder

$$\text{IX.}\quad E_x = \partial^{2\mu}f_{x+\theta h}\cdot\int_{h\div 0}\psi_{h-v}\cdot dv = \partial^{2\mu}f_{x+\theta h}\cdot\int_{h\div 0}\psi_w\cdot dw,$$

sobald ψ_w von $w=0$ bis $w=h$ ihr Vorzeichen nicht ändert, welches letztere, wie wir sogleich sehen werden, allemal der Fall ist. —

---

*) Ob diese Bedingung erfüllt ist, kann erst in jedem besonderen Falle für die gegebene Funktion f_x untersucht werden.

Die Eigenschaften der Funktion ψ_w und was daraus hervorgeht, sind nun zuvörderst ins Auge zu fassen. — Betrachtet man diese Funktion zunächst in den einfachsten Fällen, wo $\mu = 1, 2, 3,$ u. s. f. genommen wird, und bezeichnet man diese speciellen Funktionen bezüglich durch $\psi_{1,w}$, $\psi_{2,w}$, $\psi_{3,w}$, u. s. f., so daß $\psi_{\nu,w}$ die Funktion ψ_w in dem Falle vorstellt, wo $\mu = \nu$ gedacht wird, — betrachtet man also zunächst die Funktionen

$$\psi_{1,w} \quad \text{d. h.} \quad \frac{w\cdot(w-h)}{2},$$

$$\psi_{2,w} \quad \text{d. h.} \quad \frac{w^2\cdot(w-h)^2}{4!},$$

$$\psi_{3,w} \quad \text{d. h.} \quad \frac{w^2(w-h)^2(w^2-hw-\frac{1}{2}h^2)}{6!}$$

u. s. w. f.,

so findet man sogleich auf dem Wege der Induktion folgende Wahrheiten (deren Beweis sogleich nachfolgen wird), nämlich

1) $\qquad \psi_{h-v} = \psi_v$ *),

2) $\int_{h\div 0}\psi_w\cdot dw = 2\int_{\frac{1}{2}h\div 0}\psi_w\cdot dw,$

3) $\int_{h\div 0}\psi_w\cdot dw = -A_{2\mu-1}\cdot h^{2\mu+1} = (-1)^\mu\cdot\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!}\cdot h^{2\mu+1},$

4) $S\left[A_{a-1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{2\mu-a}}{(2\mu+1-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} = -A_{2\mu-1} = (-1)^\mu\cdot\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!}.$

5) Hat der Differenzial-Koeffizient $\partial(\psi_{\nu,w})_w$, den wir durch $\psi'_{\nu,w}$ bezeichnen wollen, für irgend einen bestimmten Werth von ν (der positiv ganz ist) innerhalb des Zwischenraumes von $w = 0$ bis $w = \frac{1}{2}h$, stets ein und dasselbe Vorzeichen, so ist solches auch mit dem Differenzial-Koeffizienten $\psi'_{\nu+1,w}$ der Fall, der aber dann (innerhalb desselben Zwischenraums) stets das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

---

*) Denn auch in $\psi_{3,w}$ ändert sich der dritte Faktor $w^2-hw-\frac{1}{2}h^2$ d. h. $w(w-h)-\frac{1}{2}h^2$ nicht, wenn auch $h-w$ statt w geschrieben wird.

6) Es ist in dem Zwischenraume von $w = 0$ bis $w = h$, der Werth der Funktion ψ_w stets negativ, wenn μ ungerade, und stets positiv, wenn μ gerade gedacht wird.

Die allgemeinen Beweise dieser Behauptungen sind folgende:

Beweis ad. 1. Setzt man in VII. $h-w$ statt w, so erhält man:

$$\psi_{h-w} = S\left[A_{a-1} \cdot \frac{h^a (h-w)^{2\mu-a}}{(2\mu-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1};$$

nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$(h-w)^{2\mu-a} = S\left[\frac{(2\mu-a)!}{c!\,b!} \cdot h^c (-w)^b\right]_{c+b=2\mu-a};$$

wird dies also in die vorhergehende Gleichung substituirt, so erhält man

$$\psi_{h-w} = S\left[A_{a-1} \cdot \frac{h^{a+c}(-w)^b}{c!\,b!}\right]_{c+b=2\mu-a,\; a+b=2\mu-1}.$$

Dieser Ausdruck zur Rechten ist nun eine Doppelreihe, da c und b unabhängig von einander alle Werthe 0, 1, 2, 3, ꝛc. ꝛc. annehmen müssen und nur die Bedingung existirt, daß die Summe $c+b$ nie größer als $2\mu-a$ und nie kleiner als 1 werden kann, weil aus $c+b = 2\mu-a$ und $a+b = 2\mu-1$, noch $c+b = b+1$ folgt, und kein deutscher Buchstabe negative Werthe haben darf (S. d. Vorrede). — Sondert man nun hier eine einfache Reihe ab, dadurch, daß man zuerst $c = 0$ nimmt und dann $c+1$ statt c schreibt, so ergiebt sich

$$\psi_{h-w} = S\left[A_{a-1} \cdot \frac{h^a (-w)^{2\mu-a}}{(2\mu-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} + S\left[\frac{A_{a-1}}{(c+1)!} \cdot \frac{h^{a+c+1}(-w)^b}{b!}\right]_{c+b=2\mu-1-a,\; a+b=2\mu-1},$$

während in dem zweiten Aggregat der Koeffizient

von $\dfrac{h^{a+c+1}(-w)^b}{b!}$ d. h. von $\dfrac{h^{2\mu-b} \cdot (-w)^b}{b!}$,

weil solcher $= S\left[\dfrac{A_{2\mu-2-b-c}}{(c+1)!}\right]_{a+c=2\mu-1-b}$ ist,

für jeden einzelnen bestimmten Werth von b, der $<2\mu-1$ ist, (nach II.) allemal der Null gleich ist, so daß in diesem zweiten Aggregat bloß $b = 2\mu-1$ genommen zu werden braucht. Dieses zweite Aggregat geht daher bloß in

das einzige Glied $\frac{h\cdot(-w)^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}$ über. Man hat daher nun

$$\psi_{h-w} = S\left[A_{a-1}\cdot\frac{h^a\cdot(-w)^{2\mu-a}}{(2\mu-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} + \frac{h\cdot(-w)^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}.$$

Weil aber A_{a-1} für jeden ungeraden Werth von a, der >1 ist, der Null gleich wird, und für $a=1$, den Werth $-\frac{1}{2}$ annimmt, so daß das entsprechende Glied $-\frac{1}{2}\frac{h\cdot(-w)^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}$, mit dem hinten noch hinzu addirten Gliede zusammengefaßt, das Glied

$+\frac{1}{2}\frac{h\cdot(-w)^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}$ oder $+A_0\cdot\frac{h\cdot w^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}$ bildet, so kann man das zuletzt addirte Glied weglassen, sobald man in dem Aggregat selbst $-w$ statt w schreibt; man erhält daher zuletzt

$$\psi_{h-w} = S\left[A_{a-1}\frac{h^a\cdot w^{2\mu-a}}{(2\mu-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} = \psi_w;$$

welches zu erweisen war.

Beweis ad. 2.: Er ergiebt sich aus der N. 1., wenn man $\int_{h\div 0} = \int_{\frac{1}{2}h\div 0} + \int_{h\div\frac{1}{2}h}$ nimmt, und in letzterem Integral $w=h-v$ setzt.

Beweis ad. 3. Man findet unmittelbar aus VII.

$$\int_{h\div 0}\psi_w\cdot dw = S\left[A_{a-1}\cdot\frac{h^a\cdot h^{2\mu+1-a}}{(2\mu+1-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1}$$

$$= h^{2\mu+1}\cdot S\left[\frac{A_{a-1}}{(2\mu+1-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} = h^{2\mu+1}\cdot S\left[\frac{A_{2\mu-2-b}}{(b+2)!}\right]_{a+b=2\mu-1}.$$

Fügt man hier zur Rechten noch ein Glied hinzu, dadurch, daß man $b-1$ statt b setzt, und subtrahirt man dieses Glied wieder (welches man aus dem vorstehenden Aggregat für $b=-1$ oder aus dem neu erhaltenen Aggregat für $b=0$ erhält), so hat man

$$\int_{h\div 0}\psi_w\cdot dw = h^{2\mu+1}\cdot S\left[\frac{A_{2\mu-1-b}}{(b+1)!}\right]_{a+b=2\mu} - h^{2\mu+1}\cdot A_{2\mu-1},$$

während der Minnend rechts (nach II.) der Null gleich ist; — welches zu erweisen war.

Beweis ad. 4. — Diese Gleichung 4) ist keine andere als die Gleichung 2.), wenn man die Integrationen vollführt, und auf der einen Seite die N. 3. anwendet, zuletzt aber durch $h^{2\mu+1}$ dividirt.

Beweis ad. 5. — Multiplicirt man

$$\psi'_{\nu,w} = S\left[A_{a-1}\cdot\frac{h^a\cdot w^{2\nu-1-a}}{(2\nu-1-a)!}\right]_{a+b\,=\,2\nu-1}$$

mit $h^{-2\nu-2}$ und integrirt man dann nach h, zwischen $h = h$ und $h = \infty$, so erhält man

$$\int_{\infty\div h} h^{-2\nu-2}\cdot\psi'_{\nu,w}\cdot dh = h^{-2\nu-1}\cdot S\left[A_{a-1}\cdot\frac{h^a\cdot w^{2\nu-1-a}}{(2\nu+1-a)(2\nu-1-a)!}\right]_{a+b\,=\,2\nu-1};$$

und da das Integral zur Linken (nach Einleitg. §. 20. N. 4.) mit $\psi'_{\nu,w}$ offenbar stets einerlei Vorzeichen hat, so hat auch der Ausdruck zur Rechten so lange einerlei Vorzeichen, als $\psi'_{\nu,w}$ einerlei Vorzeichen hat d. h. (der Voraussetzung zufolge) für alle Werthe von w, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}h$ liegen. Integrirt man nun nochmals, aber dasmal nach w, zwischen $w = w$ und $w = \frac{1}{2}h$, so erhält man

$$\int_{\frac{1}{2}h\div w}\left(\int'_{\infty\div h} h^{-2\nu-}\ \psi'_{\nu,w}\cdot dh\right)\cdot dw = h^{-1}\cdot S\left[A_{a-1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{2\nu-a}}{(2\nu+1-a)!}\right]_{a+b\,=\,2\nu-1}$$

$$-h^{-2\nu-1}\cdot S\left[A_{a-1}\cdot\frac{h^a\cdot w^{2\nu-a}}{(2\nu+1-a)!}\right]_{a+b\,=\,2\nu-1};$$

und es muß nun (weil die Summe von Summanden, die einerlei Vorzeichen haben, dasselbe Vorzeichen annimmt) auch dieser Ausdruck zur Rechten, von $w = 0$ an bis $w = \frac{1}{2}h$ hin, mit $\psi'_{\nu,w}$ noch ein und dasselbe Vorzeichen behalten. Nun ist aber der Minuend dieser Differenz zur Rechten (nach N. 4) $= -A_{2\nu-1}\cdot h^{-1}$; und wenn man in dem Subtrahenden, d. h. in dem andern Aggregat zur Rechten, statt der Gleichung $a+b = 2\nu-1$ diese andere $a+b = 2\nu+1$ nimmt, so hat man zwei Glieder, nämlich das für $a = 2\nu$ und noch das für $a = 2\nu+1$ zuviel genommen, während jedoch das letztere (wegen $A_{2\nu} = 0$) der Null gleich, und das erstere $= -A_{2\nu-1}\cdot h^{-1}$, also gerade der Werth des Minuenden ist, den also nun das andere Aggregat mit in sich aufgenommen hat. Der Ausdruck zur Rechten in vorstehender Gleichung ist daher

$$= -h^{-2\nu-1} \cdot S\left[A_{a-1} \cdot \frac{h^a \cdot w^{2\nu-a}}{(2\nu+1-a)!}\right]_{a+b=2\nu+1} \text{ d. h. } = -h^{-2\nu-1} \cdot \frac{1}{w} \cdot \psi'_{\nu+1,w},$$

wie aus VII. hervorgeht, wenn man solche nach w differenziirt; und dieser Ausdruck ist es also, welcher (innerhalb des gedachten Zwischenraumes) mit $\psi'_{\nu,w}$ stets ein und dasselbe und einerlei Vorzeichen hat; und dadurch ist die N. 5. erwiesen.

Beweis ad. 6. — Da $\psi'_{1,w} = w - \frac{1}{2}h$ in dem gedachten Zwischenraume (von $w = 0$ bis $w = \frac{1}{2}h$) stets negativ ist, so folgt (aus N. 5.), daß $\psi'_{2,w}$ stets positiv, $\psi'_{3,w}$ stets negativ, — ferner (in demselben Zwischenraume) $\psi'_{4,w}$ stets positiv; u. s. w. f., d. h. $\psi'_{\mu,w}$ (in dem gedachten Zwischenraume) stets $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ seyn wird, je nachdem $\mu \begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ ist.

Weil aber $\psi_{\mu,w}$ stets $\begin{Bmatrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix}$ ist, je nachdem der Differenzial-Koeffizient $\psi'_{\mu,w}$ stets $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, so ist diese Funktion $\psi_{\mu,w}$ oder ψ_w (da sie für $w=0$ der Null gleich wird) innerhalb des Zwischenraumes von $w = 0$ an bis $w = \frac{1}{2}h$ hin, von Null an stets $\begin{Bmatrix}\text{fallend, also stets negativ}\\ \text{steigend, also stets positiv}\end{Bmatrix}$ so oft $\mu \begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$. Wenn aber die Funktion ψ_w von $w=0$ an bis $w = \frac{1}{2}h$ hin stets einerlei Vorzeichen hat, dann hat sie auch stets dasselbe Vorzeichen, von $w = \frac{1}{2}h$ an bis $w = h$ hin (weil $\psi_{h-w} = \psi_w$ ist). Welches zu erweisen war.

Nach allen diesen Beweisen kann man nun weiter folgern: einmal aus V.—VIII.

$$\text{X.}\quad \Sigma f_x = \frac{1}{h} \cdot \int f \cdot dx - \tfrac{1}{2} f_x + \frac{\mathfrak{B}_1}{2!} h \cdot \partial f_x - \frac{\mathfrak{B}_3}{4!} h^3 \cdot \partial^3 f_x + \frac{\mathfrak{B}_5}{6!} h^5 \cdot \partial^5 f_x$$
$$- \cdots + (-1)^{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-3}}{(2\mu-2)!} h^{2\mu-3} \cdot \partial^{2\mu-3} f_x - \frac{1}{h} \psi_{\theta h} \cdot \partial^{2\mu-1} f_x,$$

sobald $\partial^{2\mu} f_{x+\nu}$ von $\nu = 0$ bis $\nu = h$ stets ein und dasselbe Vorzeichen behält, während θ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt (weil nach N. 1. die Werthe von $\psi_{\theta h}$ von $\theta = \frac{1}{2}$ bis $\theta = 1$ dieselben werden, wie für $\theta = \frac{1}{2}$ bis $\theta = 0$).

Ferner folgt aus V. VI. VII. und IX.

$$\text{XI.}\quad \Sigma f_x = \frac{1}{h}\cdot\int f\cdot dx - \tfrac{1}{2}f_x + \frac{\mathfrak{B}_1}{2!}h\cdot\partial f_x - \frac{\mathfrak{B}_3}{4!}h^3\cdot\partial^3 f_x + \frac{\mathfrak{B}_5}{6!}h^5\cdot\partial^5 f_x$$

$$-\cdots+(-1)^{\mu}\cdot\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-3}}{(2\mu-2)!}h^{2\mu-3}\cdot\partial^{2\mu-3}f_x - (-1)^{\mu}\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!}h^{2\mu}\cdot\Sigma\partial^{2\mu}f_{x+\theta h},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt. Zu X. und XI. muß übrigens (zur Rechten) jedesmal eine (periodische) Konstante noch hinzukommen. — Das Resultat X. läßt sich aber noch weiter umformen.

Nimmt man nämlich die Summenformel II. des §. 68., zu der man sich noch, wenn sie irgendwo abbrechend gedacht wird, das Ergänzungsglied hinzudenken muß, wie solches hier so eben gefunden worden ist, — schreibt man aber die Formel II. jetzt so:

$$\Sigma f_x = S[A_{a-1}h^{a-1}\cdot\partial^{a-1}f_x],$$

indem man $A_{-1} = 1$, $\partial^{-1}f_x = \int f\cdot dx$ und $\partial^0 f_x = f_x$ sich denkt, während (wie dort gefunden worden)

$$\text{III.}\quad A_{2\mu} = 0, \qquad \text{IV.}\quad A_{2\mu-1} = (-1)^{\mu+1}\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!}$$

ist, — und setzt man hier herein e^x statt f_x, also e^x statt $\partial^{-1}f_x$, und $\dfrac{e^x}{e^h-1}$ statt Σf_x, so erhält man:
zuerst

$$\alpha)\quad \frac{1}{e^h-1} = S[A_{a-1}\cdot h^{a-1}]$$

und dann, wenn $2h$ statt h gesetzt wird,

$$\beta)\quad \frac{1}{e^{2h}-1} = S[A_{a-1}\cdot 2^{a-1}\cdot h^{a-1}].$$

Multiplicirt man nun diese letztere Gleichung mit

$$\gamma)\quad e^h+1 = 1+S\left[\frac{h^b}{b!}\right],$$

so erhält man:

$$\delta)\quad \frac{1}{e^h-1} = S\left[A_{a-1}\cdot 2^{a-1}\cdot h^{a-1}\right]+S\left[A_{a-1}\frac{2^{a-1}\cdot h^{a+b-1}}{b!}\right].$$

Vergleicht man nun diese beiden Reihen rechts in α.) und in δ.) mit einander, so müssen die Koeffizienten von h^{n-1} in beiden einander gleich seyn, und dies giebt

$$A_{n-1} = 2^{n-1}A_{n-1} + S\left[A_{a-1}\cdot\frac{2^{a-1}}{b!}\right]_{a+b=n},$$

oder, wenn man rechts $b=0$ und dann $b+1$ statt b schreibt (d. h. wenn man das allererste Glied des Aggregats absondert)

$$A_{n-1} = 2^{n-1}\cdot A_{n-1} + 2^{n-1}\cdot A_{n-1} + S\left[A_{a-1}\cdot\frac{2^{a-1}}{(b+1)!}\right]_{a+b=n-1}$$

d. h.

$$\varepsilon)\quad -(2^n-1)\cdot A_{n-1} = S\left[A_{a-1}\cdot\frac{2^{a-1}}{(b+1)!}\right]_{a+b=n-1};$$

oder, wenn man 2μ statt n schreibt, und $2\mu-a$ statt $b+1$ (was wegen $a+b=2\mu-1$ erlaubt ist), zuletzt aber durch $2^{2\mu-1}$ wegdividirt,

$$\zeta)\quad -\frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}}\cdot A_{2\mu-1} = S\left[A_{a-1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{2\mu-a}}{(2\mu-a)!}\right]_{a+b=2\mu-1} *),$$

während der Ausdruck zur Rechten (nach VII.) nichts anders als $h^{-2\mu}\cdot\psi_{\frac{1}{2}h}$ ist, so daß man als neue Eigenschaft der Funktion ψ_w noch

$$7)\qquad \psi_{\frac{1}{2}h} = -\frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}}\cdot A_{2\mu-1}\cdot h^{2\mu}$$

hat.

Dieser Gleichung ζ.) oder 7.) (also einer lang gekannten Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen) kann man sich nun bedienen, um das Resultat X. umzuformen. Da nämlich nach dem Beweise der N. 6. die Funktion ψ_w von $w=0$ an bis $w=\frac{1}{2}h$ hin, von Null an stetig $\begin{Bmatrix}\text{wächst}\\ \text{abnimmt}\end{Bmatrix}$, je nachdem

*) Diese Gleichung geht zugleich in eine lang bekannte Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen über, so wie man die Gleichungen III. und IV. in Anwendung bringt.

$\mu \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ ist, so ist ψ_{1h} positiv oder negativ, aber an sich der größeste Werth von ψ_w in dem gedachten Zwischenraume; also kann man (in der Formel X.) $\lambda \cdot \psi_{1h}$ statt $\psi_{\vartheta h}$ schreiben, wenn man sich λ zwar unbekannt aber zwischen 0 und 1 denkt; d. h. man kann (nach 7.)

$$\psi_{\vartheta h} = -\lambda \cdot \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}} \cdot A_{2\mu-1} \cdot h^{2\mu} = (-1)^{\mu} \cdot \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}} \lambda \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!} \cdot h^{2\mu}$$

nehmen, wodurch die X. übergeht in

$$\text{XII.}\quad \Sigma f_x = \frac{1}{h} \cdot \int f \cdot dx - \tfrac{1}{2} f_x + \frac{\mathfrak{B}_1}{2!} h \cdot \partial f_x - \frac{\mathfrak{B}_3}{4!} h^3 \cdot \partial^3 f_x + \frac{\mathfrak{B}_5}{6!} h^5 \cdot \partial^5 f_x$$
$$- \cdots + (-1)^{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-3}}{(2\mu-2)!} h^{2\mu-3} \cdot \partial^{2\mu-3} f_x - (-1)^{\mu} \lambda \cdot \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}} \cdot h^{2\mu-1} \cdot \partial^{2\mu-1} f_x,$$

wo λ zwischen 0 und 1 liegt, wo noch rechts eine (periodische) Konstante hinzukommt und wo vorausgesetzt worden ist, daß $\partial^{2\mu} f_{x+\nu}$ von $\nu = 0$ bis $\nu = h$ sein Vorzeichen nicht ändert.

Da ferner $\frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}} = 2 - \frac{1}{2^{2\mu-1}} < 2$ ist, so liegt allemal $\lambda \cdot \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}}$ zwischen 0 und 2, folglich $\varkappa = -1 + \lambda \cdot \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}}$ allemal zwischen -1 und $+1$; und weil dabei $\lambda \cdot \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu-1}} = 1 + \varkappa$ ist, so kann man die Gleichung XII. auch noch so schreiben:

$$\text{XIII.}\quad \Sigma f_x = \frac{1}{h} \cdot \int f \cdot dx - \tfrac{1}{2} f_x + \frac{\mathfrak{B}_1}{2!} h \cdot \partial f_x - \frac{\mathfrak{B}_3}{4!} h^3 \cdot \partial^3 f_x + \cdots$$
$$+ (-1)^{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-3}}{(2\mu-2)!} h^{2\mu-3} \cdot \partial^{2\mu-3} f_x - (-1)^{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!} h^{2\mu-1} \cdot \partial^{2\mu-1} f_x$$
$$+ (-1)^{\mu} \cdot \varkappa \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu)!} h^{2\mu-1} \cdot \partial^{2\mu-1} f_x,$$

wo $\varkappa$ zwischen -1 und $+1$ liegt, also positiv oder negativ, aber an sich < 1 ist, so daß das Ergänzungsglied jetzt alle-

mal kleiner ist, als das Glied der Reihe, bei welchem man abbricht. — Nur muß zu dem endlichen Integral noch die (periodische) Konstante hinzugefügt und besonders vorausgesetzt werden, daß $\Delta^{2\mu} f_{x+\nu}$ von $\nu = 0$ bis $\nu = h$ sein Vorzeichen nicht ändert.

Anmerkg. Nach diesen allgemeinen Untersuchungen über die Auffindung von Σf_x, wollen wir jetzt noch Reduktions-Formeln aufstellen, durch welche ein endliches Integral auf ein anderes zurückgeführt wird.

§. 70.

Es ist (nach §. 54. N. 4.)

I. $\Sigma f_{x+h} = f_x + \Sigma f_x$;

II. $\Sigma f_{x+2h} = f_{x+h} + f_x + \Sigma f_x$;

III. $\Sigma f_{x+3h} = f_{x+2h} + f_{x+h} + f_x + \Sigma f_x$;

u. s. w. f.

Die Anwendung dieser Formeln in einigen Beispielen.

Soll z. B. $\Sigma \frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$ gefunden werden, so zerlegt man diesen Bruch sogleich in seine Partialbrüche, nämlich in $\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} - 2 \cdot \frac{1}{x+2h}\right)$, also die gesuchte Summe in

$$\frac{1}{h}\left(\Sigma\frac{1}{x} + \Sigma\frac{1}{x+h} - 2\Sigma\frac{1}{x+2h}\right).$$

Wendet man nun die obigen Reduktionsformeln an, so erhält man nach ihnen

$$-2\Sigma\frac{1}{x+2h} = -2\,\frac{1}{x+h} - 2\frac{1}{x} - 2\Sigma\frac{1}{x};$$

$$\Sigma\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} + \Sigma\frac{1}{x}.$$

Substituirt man aber dies in den vorliegenden Ausdruck, so hat man sogleich gefunden

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = \frac{1}{h}\cdot\left(-\frac{2}{x+h}-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{h}\cdot\frac{3x+h}{x(x+h)}.$$

Wollte man (als zweites Beispiel) $\Sigma log R_x$ finden, so hätte man nach den obigen Formeln

$$\Sigma log R_{x+nh} = log R_{x+(n-1)h} + log R_{x+(n-2)h} + \cdots$$
$$+ log R_{x+h} + log R_x + \Sigma log R_x$$

oder, wenn man statt x lieber $x-nh$ schreibt,

$$\Sigma log R_x = log[R_{x-h}\cdot R_{x-2h}\cdot R_{x-3h}\cdots R_{x-nh}] + \Sigma log R_{x-nh}$$

Dies Resultat würde nun zwar das Verlangte nicht geben, wohl aber

IV. $$\begin{cases} \Sigma log \frac{R_x}{R_{x-nh}} = log(R_{x-h}\cdot R_{x-2h}\cdot R_{x-3h}\cdots R_{x-nh}) \\ \text{oder auch} \\ \Sigma log \frac{R_{x+nh}}{R_x} = log(R_x\cdot R_{x+h}\cdot R_{x+2h}\cdots R_{x+(n-1)h}). \end{cases}$$

§. 70[b].

Eine andere (von Taylor zuerst gegebene) Reduktionsformel findet man, wenn man von der Formel §. 56. N. 4. ausgeht, nämlich von der Formel

$$\Sigma(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_x\cdot\Sigma\psi_x - \Sigma(\Delta\varphi_x\cdot\Sigma\psi_{x+h}),$$

und dieselbe Formel immer auf's Neue verwendet, um die Summen am weitesten zur Rechten wieder in ähnlicher Weise umzuformen. Man erhält dann (nach μfacher Wiederholung)

I. $$\Sigma(\varphi_x\cdot\psi_x) = \underset{a+b=\mu}{S}\left[(-1)^a\Delta^a\varphi_x\cdot\Sigma^{1+a}\psi_{x+ah}\right]$$
$$+(-1)^{\mu+1}\Sigma(\Delta^{\mu+1}\varphi_x\cdot\Sigma^{\mu+1}\psi_{x+(\mu+1)h}).$$

Die Umformung, welche Condorcet dabei hat statt finden lassen (S. Essai sur l'applic. de l'Analyse à la probabil. des décisions p. 163.) ergiebt sich dadurch, daß (nach §. 54. N. 2.) für jede ganze Zahl m

$$\psi_{x+mh} = S[m_c\cdot\Delta^c\psi_x]\ .$$

ist. Dies (für $m = a$ und für $m = \mu+1$ genommen) in die I. substituirt giebt

$$\text{II.} \quad \Sigma(\varphi_x \cdot \psi_x) = S\Big[(-1)^a \cdot a_c \cdot \Delta^a \varphi_x \cdot \Sigma^{1+b}\psi_x\Big]_{\substack{b+c=a,\; a+b=\mu}}$$
$$+(-1)^{\mu+1} \cdot S\Big[(\mu+1)_c \Sigma(\Delta^{\mu+1}\varphi_x \cdot \Sigma^{1+\mu-c}\psi_x)\Big]_{c+b=\mu+1},$$

welche Formel dem Wesen nach die des Condorcet ist, aber viel vollkommener ausgedrückt.

Setzt man a^x statt ψ_x, so geht diese Formel über in:

$$\text{III.} \quad \Sigma(a^x \cdot \varphi_x) = \frac{1}{a^h-1} S\left[(-1)^a \Delta^a \varphi_x \cdot a^x \left(\frac{a^h}{a^h-1}\right)^a\right]_{a+b=\mu}$$
$$+(-1)^{\mu+1}\left(\frac{a^h}{a^h-1}\right)^{\mu+1} \cdot \Sigma(a^x \cdot \Delta^{\mu+1}\varphi_x).$$

So oft nun φ_x eine ganze Funktion von irgend einem Grade ist, so kann man μ so groß nehmen, daß in I.—III. die Ergänzungsglieder in $\Sigma(0)$ d. h. in eine (periodische) Konstante übergehen, und dann sind allemal die endlichen Summen des Produkts $\varphi_x \cdot \psi_x$ in die Summen vom Faktor ψ_x allein ausgedrückt, folglich in endlicher Form hergestellt, wenn dies bei $\Sigma\psi_x$, $\Sigma^2\psi_x$, $\Sigma^3\psi_x$, ꝛc. ꝛc. möglich ist, also z. B. in III., wo $\psi_x = a^x$ gedacht worden ist.

Anmerk. 1. Das, was die Gleichung III. liefert, wenn φ_x eine ganze Funktion von x ist, kann man auch auf folgendem Wege erhalten.

Man setzt nämlich

$$\Sigma a^x(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m)$$
$$= a^x \cdot (\varkappa_0+\varkappa_1x+\varkappa_2x^2+\cdots+\varkappa_mx^m),$$

wo $A_0, A_1, A_2, \cdots A_m$ gegeben, dagegen $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ noch unbestimmte, gesuchte Koeffizienten sind. Nimmt man nun links und rechts die Differenzen, und vergleicht man links und rechts, so erhält man die Gleichungen

$$A_m = -\varkappa_m + a^h \cdot \varkappa_m$$
$$A_{m-1} = -\varkappa_{m-1} + a^h(\varkappa_{m-1} + m \cdot \varkappa_m \cdot h)$$

$$A_{m-2} = -\varkappa_{m-2}+a^h(\varkappa_{m-2}+(m-1)\cdot\varkappa_{m-1}h+m_2\cdot\varkappa_m\cdot h^2)$$

$$A_{m-3} = -\varkappa_{m-3}+a^h(\varkappa_{m-3}+(m-2)\cdot\varkappa_{m-2}h+(m-1)_2\cdot\varkappa_{m-1}h^2 +m_3\cdot\varkappa_m\cdot h^3)$$

und allgemein

$$A_{m-\nu} = -\varkappa_{m-\nu}+a^h(\varkappa_{m-\nu}+(m+1-\nu)\cdot\varkappa_{m+1-\nu}\cdot h +(m+2-\nu)_2\cdot\varkappa_{m+2-\nu}\cdot h^2+(m+3-\nu)_3\cdot\varkappa_{m+3-\nu}\cdot h^3+\cdots +m_\nu\cdot\varkappa_m\cdot h^\nu) \text{ *)}$$

---

*) Es ist nämlich

$$\Delta(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_x\cdot\Delta\psi_x+\psi_x\cdot\Delta\varphi_x+\Delta\varphi_x\cdot\Delta\psi_x$$
$$= \psi_x\cdot\Delta\varphi_x+(\varphi_x+\Delta\varphi_x)\cdot\Delta\psi_x;$$

also, wenn man a^x statt φ_x setzt,

1) $\Delta(a^x\cdot\psi_x) = a^x\cdot(a^h-1)\cdot\psi_x+a^x\cdot a^h\cdot\Delta\psi_x.$

Wird also

2) $\Sigma\left(a^x\cdot S\left[\begin{matrix}A_a\cdot x^a\\ a+b=m\end{matrix}\right]\right) = a^x\cdot S\left[\begin{matrix}\varkappa_a\cdot x^a\\ a+b=m\end{matrix}\right]$

gesetzt, wie wir oben im Texte gethan haben, und nun rechts die Differenz genommen, so erhält man (nach N. 1. und nach §. 60. I.) zur Rechten

$$a^x\cdot(a^h-1)\cdot S\left[\begin{matrix}\varkappa_a\cdot x^a\\ a+b=m\end{matrix}\right]+a^x\cdot a^h\cdot S\left[\begin{matrix}\varkappa_a\cdot a_{c+1}\cdot x^{a-c-1}\cdot h^{c+1}\\ a+b=m,\ c+d=a-1\end{matrix}\right].$$

Weil aber die Reihe zur Rechten für $c=-1$ in die zur Linken übergeht, so lassen sich die mit a^h affizirten Glieder zusammenfassen, indem man $c-1$ statt c schreibt. Dies giebt, indem man zuletzt noch $c+d$ statt a setzt,

3) $-a^x\cdot S\left[\begin{matrix}\varkappa_a\cdot x^a\\ a+b=m\end{matrix}\right]+a^x\cdot a^h\cdot S\left[\begin{matrix}(c+d)_c\cdot\varkappa_{c+d}\cdot x^d\cdot h^c\\ b+c+d=m\end{matrix}\right].$

Da nun dieser Ausdruck 3.) mit dem Ausdruck unter dem Summenzeichen in 2.) zur Linken, identisch werden soll, so müssen die Koeffizienten von $x^{m-\nu}$ links und rechts einander gleich seyn; dies giebt aber (weil zur Rechten $m-\nu$ statt d zu stehen kommt)

$$A_{m-\nu} = -\varkappa_{m-\nu}+a^h\cdot S\left[\begin{matrix}(m-\nu+c)_c\cdot\varkappa_{m-\nu+c}\cdot h^c\\ b+c=\nu\end{matrix}\right],$$

wo $(m-\nu+c)_c$ ein Binomial-Koeffizient ist; und dies ist die obige Gleichung, in welcher die übrigen Gleichungen alle stecken, wenn man statt ν nach und nach $0, 1, 2, 3, \cdots m$ setzt.

bis zuletzt

$$A_0 = -\varkappa_0 + a^h(\varkappa_0 + \varkappa_1 h + \varkappa_2 h^2 + \cdots + \varkappa_m \cdot h^m),$$

aus welchen Gleichungen einer der Koeffizienten nach dem andern sich ergiebt, zuerst $\varkappa_m$, dann $\varkappa_{m-1}$, 2c. 2c.

Anmerk. 2. Man kann auch nach §. 60. V. statt $\Delta^a\varphi_x$ wiederum setzen die Reihe, welche symbolisch durch $(e^{\partial \cdot h}-1)^a\varphi_x$ ausgedrückt, in der IV. des §. 60. aber wirklich hergestellt ist. Dadurch gehen die Formeln I.—III. in solche über, welche rechts die Differenzial-Koeffizienten von φ_x statt der Differenzen $\Delta^a\varphi_x$ enthalten, und diese Formeln müssen dann wieder mit den Formeln XII. oder XIII. des §. 69. übereinstimmen.

Für den in der III. betrachteten Fall hat man auch folgendes Verfahren eingeschlagen.

Erstlich integrirt man $\Sigma a^x \cdot \varphi_x$ theilweise (d. h. man wendet die Formel N. 4. des §. 56. an) und erhält

1) $(a^h-1)\cdot\Sigma(a^x\cdot\varphi_x) = a^x\cdot\varphi_x - a^h\cdot\Sigma(a^x\cdot\Delta\varphi_x)$.

Hierauf setzt man statt $\Delta\varphi_x$ seinen Werth $S\left[\partial^{a+1}\varphi_x\cdot\frac{h^{a+1}}{(a+1)!}\right]$ und man hat

2) $(a^h-1)\Sigma(a^x\cdot\varphi_x) = a^x\cdot\varphi_x - a^h\cdot S\left[\frac{h^{a+1}}{(a+1)!}\cdot\Sigma(a^x\cdot\partial^{a+1}\varphi_x)\right]$.

Setzt man nun hier nach und nach $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$, $\partial^3\varphi_x$, 2c. 2c. statt φ_x, so erhält man eine beliebige Anzahl von Gleichungen, um $\Sigma(a^x\cdot\partial\varphi_x)$, $\Sigma(a^x\cdot\partial^2\varphi_x)$, $\Sigma(a^x\cdot\partial^3\varphi_x)$, 2c. 2c. eliminiren, und so $\Sigma(a^x\cdot\varphi_x)$ selbst herstellen zu können.

§. 71.

Auf die beiden Summen

1) $\Sigma Sin(px+q) = -\frac{Cos(px+q-\frac{1}{2}ph)}{2\,Sin(\frac{1}{2}ph)}$

und

2) $\Sigma Cos(px+q) = \frac{Sin(px+q-\frac{1}{2}ph)}{2\,Sin(\frac{1}{2}ph)}$

lassen sich zurückführen die Summen

$$\Sigma(Sin\,x)^m \cdot (Cos\,x)^n,$$

so oft m und n positive ganze Zahlen oder Null sind, in so ferne man $(Sin\,x)^m \cdot (Cos\,x)^n$ in eine Reihe von Gliedern von der Form $A \cdot Sin\,px$ oder $A \cdot Cos\,px$ verwandeln kann. — Kommt das Glied $A \cdot Cos\,0x$ d. h. A selbst dabei mit vor, so hat man $\Sigma A = A \cdot \frac{x}{h}$ zu nehmen.

§. 72.

Sollen $\Sigma(ax+b)^p \cdot Sin\,x$ und $\Sigma(ax+b)^p \cdot Cos\,x$ gefunden werden (unter der Voraussetzung, daß $\Delta x = h$, d. h. unter der Voraussetzung, daß diese Summen nach x genommen werden sollen, und nicht etwa nach p, oder nach a oder b), so verfährt man wie folgt:

Man setzt $ax+b = x'$, und $\Delta x' = h'$, so daß $h' = ah$ ist) und nimmt von $(x'-h')^p \cdot Cos(x-\frac{1}{2}h)$, so wie von $(x'-h')^p \cdot Sin(x-\frac{1}{2}h)$ die Differenzen, und man erhält:

1) $\Delta[(x'-h')^p \cdot Cos(x-\frac{1}{2}h)] = x'^p \cdot Cos(x+\frac{1}{2}h) - (x'-h')^p \cdot Cos(x-\frac{1}{2}h)$
$= x'^p \cdot [Cos(x+\frac{1}{2}h) - Cos(x-\frac{1}{2}h)] + S[(-1)^a p_{a+1} \cdot x^{p-a-1} \cdot h'^{a+1}]$

2) $\Delta[(x'-h')^p \cdot Sin(x-\frac{1}{2}h)] = x'^p \cdot [Sin(x+\frac{1}{2}h) - Sin(x-\frac{1}{2}h)]$
$+ S[(-1)^a p_{a+1} \cdot x^{p-a-1} \cdot h'^{a+1}]$.

Nimmt man nun

$-2\,Sin\,\frac{1}{2}h \cdot Sin\,x$ statt $Cos(x+\frac{1}{2}h) - Cos(x-\frac{1}{2}h)$

und $2\,Cos\,\frac{1}{2}h \cdot Sin\,x$ statt $Sin(x+\frac{1}{2}h) - Sin(x-\frac{1}{2}h)$

und dann links und rechts (in 1. u. 2.) wiederum die endlichen Integrale (d. h. die Summen), so erhält man die nöthigen Reduktionsformeln, nämlich:

$$\text{I.}\quad \Sigma(x'^p \cdot Sin\,x) = -\frac{(x'-h')^p \cdot Cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\,Sin\,\frac{1}{2}h}$$
$$+ \frac{1}{2\,Sin\,\frac{1}{2}h} \cdot S\left[(-1)^a \cdot p_{a+1} \cdot h'^{a+1} \cdot \Sigma x'^{p-a-1}\,Cos(x-\frac{1}{2}h)\right];$$

$$\text{II.}\quad \Sigma(x'^p \cdot Cos\, x) = \frac{(x'-h')^p \cdot Sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\, Sin\, \frac{1}{2}h}$$

$$-\frac{1}{2\, Sin\, \frac{1}{2}h} \cdot S\left[(-1)^a \cdot p_{a+1} \cdot h'^{a+1} \cdot \Sigma x'^{p-a-1}\, Sin(x-\tfrac{1}{2}h)\right],$$

wo noch überall $ax+b$ statt x', und ah statt h' gesetzt werden muß.

Für $p = 1$ namentlich findet man hieraus

$$3)\quad \Sigma[(ax+b) \cdot Sin\, x] = -\frac{[a(x-h)+b] \cdot Cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\, Sin\, \frac{1}{2}h} + \frac{ah\, Sin(x-\frac{1}{2}h)}{2(Sin\, \frac{1}{2}h)^2};$$

$$4)\quad \Sigma[(ax+b) \cdot Cos\, x] = \frac{[a(x-h)+b] \cdot Sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\, Sin\, \frac{1}{2}h} + \frac{ah\, Cos(x-\frac{1}{2}h)}{2(Sin\, \frac{1}{2}h)^2}.$$

Anmerkg. Nach dem Bisherigen kann man also finden die endlichen Integrale von

$$1)\quad \frac{A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots}{x^{n|h}}$$

wenn α, β, γ, etc. n ganze positive Zahlen sind und n die größeste darunter; — ferner von

$$2)\quad a^{mx} \cdot (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \cdots)$$

wenn α, β, γ, etc. positiv ganz, m dagegen positiv oder negativ ganz ist; — ferner von

$$3)\quad (Sin\, x)^m \cdot Cos\, x^n \cdot (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \cdots)$$

wenn m, n, α, β, γ, etc. positiv ganz sind.

Dies halten wir aber für das wichtigste, was sich über die endliche Integration einer Funktion f_x mittheilen läßt.

Des fünften Kapitels zweite Abtheilung.

Endliche Integration der endlichen Differenzen-Gleichungen.

§. 73.

Eine Gleichung zwischen f_x, Δf_x, $\Delta^2 f_x$, ... $\Delta^n f_x$ und x, heißt eine endliche Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung.

Da sich $\Delta^\nu f_x$ (nach §. 54. N. 1.) allemal in f_x, f_{x+h}, f_{x+2h}, ... $f_{x+\nu h}$ ausdrücken läßt, so folgt

> daß eine endliche Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung eigentlich nichts weiter ist, als eine Gleichung zwischen den $n+1$ Gliedern einer Ur-Reihe
> f_x, f_{x+h}, f_{x+2h}, ..., durch welche jedes folgende Glied der gedachten Reihe in die n nächst vorangehenden Glieder derselben Reihe ausgedrückt gegeben ist.

Wird aus einer solchen endlichen Differenzen-Gleichung (der n^{ten} Ordnung) die Funktion f_x selbst hergestellt, so sagt man: „es sey die gedachte Differenzen-Gleichung endlich integrirt."

Die endliche Integration einer Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung ist also nichts anders als die Auffindung des independenten Gesetzes einer Reihe, wenn das rekurrente Gesetz derselben, durch welches jedes folgende Glied in die n nächst vorangehenden Glieder derselben Reihe ausgedrückt wird, bekannt und gegeben ist (S. Anmerkg. 1. zu §. 1.).

Anmerkg. 1. Alle Untersuchungen über Differenzen setzen aber stets ein bestimmt gegebenes Δx oder h (häufig $\Delta x = h = 1$) voraus, und nicht mehr jeden willkührlichen Werth von h.

Anmerkg. 2. Die endliche Integration der Gleichungen gelingt in den seltensten Fällen, und diese letzteren wollen wir nun im Wesentlichen betrachten.

§. 74.

Die endliche Integration der lineären und reducirten Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung, d. h. der Gleichung

1) $\Delta f_x + A_x \cdot f_x = 0$ oder $f_{x+h} = (1-A_x) \cdot f_x$,

wo A_x eine gegebene Funktion von x ist, geschieht wie folgt:

Man setzt

2) $f_x = e^t$ und erhält $\Delta f_x = e^t \cdot (e^{\Delta t}-1)$,

wenn Δt den Zuwachs bedeütet, den t als Funktion von x erleidet, indem x um Δx oder h wächst. Substituirt man diese Werthe in die 1.), so ergiebt sich

3) $(e^{\Delta t}-1)+A_x = 0$, $e^{\Delta t} = 1-A_x$, $\Delta t = log(1-A_x)$

und

4) $t = \Sigma log(1-A_x)+c$.

Folglich hat man (aus 2.)

5) $f_x = e^{\Sigma log(1-A_x)+c} = C \cdot e^{\Sigma log(1-A_x)}$

gefunden, wo C die (periodische) willkührliche Konstante vorstellt, welche in 4.) durch c vorgestellt gewesen ist.

Anmerkg. 1. Ist A_x nach x konstant und deshalb nur durch A bezeichnet, so findet sich also aus

$$\Delta f_x + A \cdot f_x = 0 \quad \text{d. h. aus} \quad f_{x+h}+(A-1)f_x = 0$$

sogleich (weil jetzt $\Sigma log(1-A) = \frac{x}{h} \cdot log(1-A)$ ist)

$$f_x = C \cdot e^{\frac{x}{h} \cdot log(1-A)} = C \cdot (1-A)^{\frac{x}{h}},$$

wo C die willkührliche (periodische) Konstante vorstellt.

Anmerkg. 2. Ist A_x nicht konstant nach x, so kann man $\Sigma log(1-A_x)$ in endlicher Form nicht angeben. Weil man aber, wenn $1-A_x = R_x$ gesetzt wird (nach §. 70.) doch den Unterschied

$$\Sigma log R_{x+nh} - \Sigma log R_x$$

angeben kann, so kann man aus dem gewonnenen Resultat (N. 5.), indem man daselbst $x+nh$ statt x setzt und beide Gleichungen durch einander dividirt, erhalten

$$\frac{f_{x+nh}}{f_x} = e^{\Sigma log R_{x+nh} - \Sigma log R_x}$$

$$= R_x \cdot R_{x+h} \cdot R_{x+2h} \cdots R_{x+(n-1)h},$$

woraus

6) $$f_{x+nh} = R_x \cdot R_{x+h} \cdot R_{x+2h} \cdots R_{x+(n-1)h} \times f_x$$

hervorgeht.

Setzt man hier 0 statt x und $h=1$, so bekommt man f_n d. h. den Werth von f_x, wenn statt x eine positive ganze Zahl n gesetzt wird, in eine Konstante f_0 ausgedrückt.

Wenn aber $1-A_x = R_x$ gesetzt wird, so ist die gegebene Gleichung 1.) jetzt diese

$$f_{x+h} = R_x \cdot f_x.$$

Setzt man daher hier herein sogleich $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, ... und zuletzt $x+(n-1)h$ statt x, und multiplicirt man alle entstehenden Gleichungen mit einander, so findet man die Gleichung 6. weit direkter *).

---

*) In der Aufgabe: Die Koeffizienten f_0, f_1, f_2, f_3, 2c. der Reihe $f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+\cdots$ zu finden, welche mit a^x die Eigenschaft gemein hat, nach welcher $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ ist, erhält man als Eigenschaft dieser Koeffizienten die Gleichung

1) $$n \cdot f_n = f_1 \cdot f_{n-1},$$

oder, wenn man $x+1$ statt n setzt, die Gleichung

2) $$f_{x+1} = \frac{f_1}{x+1} \cdot f_x$$

d. h. für $\Delta x = h = 1$, die lineäre und reducirte Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung

3) $$\Delta f_x + \left(1 - \frac{f_1}{x+1}\right) \cdot f_x = 0,$$

welche die gegebene Gleichung 1. des §. 74. ist, sobald man

§. 74b:

Die endliche Integration der lineären und vollständigen Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung, nämlich der Gleichung

1) $\Delta f_x + A_x \cdot f_x = \varphi_x$,

wo A_x und φ_x gegebene Funktionen von x sind, macht sich so:

Man setzt

2) $f_x = y_x \cdot z_x$, hat $\Delta f_x = y_x \cdot \Delta z_x + z_x \cdot \Delta y_x + \Delta y_x \cdot \Delta z_x$;

und indem man diese Werthe in die 1.) substituirt, geht letztere über in

3) $y_x \cdot \Delta z_x + z_x \cdot \Delta y_x + \Delta y_x \cdot \Delta z_x + A_x \cdot y_x z_x = \varphi_x$.

$A_x = 1 - \frac{f_1}{x+1}$, also $R_x = \frac{f_1}{x+1}$ und $\Delta x = h = 1$ nimmt.

Ein allgemeines Integral in endlicher Form läßt sich nun nicht herstellen; das Verfahren der Anmerkg. 2. giebt aber

4) $f_{x+n} = \frac{f_1^n}{(x+1)^{n|1}} \cdot f_x$;

und diese Gleichung giebt wieder für $x = 0$,

5) $f_n = \frac{f_1^n}{n!} \cdot f_0$,

während noch die Gleichung 1.) für $n = 1$ in $f_0 = 1$ übergeht, so daß die 5.) giebt

6) $f_n = \frac{f_1^n}{n!}$.

Dasselbe Resultat (6.) hätte man aber viel einfacher erhalten, wenn man in die Gleichung 1.) statt n nach und nach $1, 2, 3, \cdots n$ gesetzt und zuletzt alle Gleichungen mit einander multiplicirt hätte.

Nach dem hier Gesagten sind aber Ansichten des Lagrange zu verbessern, welche man in allen späteren Schriften über diese Integration der lineären reducirten Gleichung wiederholt findet, und welche mit dem hier Gegebenen in Widerspruch stehen, welche endlich auch bei späteren Untersuchungen ihren Einfluß auszuüben nicht verfehlt haben.

Da man nun über eine der beiden Funktionen y_x oder z_x noch nach Belieben disponiren kann, so denkt man sie sich so, daß

4) $\Delta y_x + A_x \cdot y_x = 0$

wird, wodurch die 3.) übergeht in

5) $(y_x + \Delta y_x) \cdot \Delta z_x = \varphi_x$ oder $y_{x+h} \cdot \Delta z_x = \varphi_x$.

Die Gleichung 4.) ist nun im §. 74. bereits integrirt und giebt

6) $y_x = e^{\Sigma log(1-A_x)}$

zu welchem Werthe wir gar keine willkührliche Konstante hinzufügen, da y_x eine von uns ganz beliebig angenommene Funktion von x ist. Die Gleichung 5.) giebt aber dann sogleich noch hinzu

7) $z_x = \Sigma \frac{\varphi_x}{y_{x+h}} + C$,

wo C die eingehende willkührliche (periodische) Konstante vorstellt. — Zuletzt ist $f_x = y_x \cdot z_x$ gefunden.

Anmerkg. 1. Ist A_x nach x konstant und bloß durch A bezeichnet, so hat man

$$y_x = (1-A)^{\frac{x}{h}}$$

und

$$z_x = \Sigma\varphi_x \cdot (1-A)^{-\frac{x}{h}-1} + C$$

also

$$f_x = (1-A)^{\frac{x}{h}} \cdot (\Sigma\varphi_x \cdot (1-A)^{-\frac{x}{h}-1} + C)$$

als das Integral gefunden der Differenzen-Gleichung

$$\Delta f_x + A \cdot f_x = \varphi_x.$$

Anmerkg. 2. Ist auch noch φ_x konstant nach x und durch B vorgestellt, so findet sich hiernach das endliche Integral der Gleichung

$$\Delta f_x + A \cdot f_x = B \quad \text{oder} \quad f_{x+h} = (1-A) \cdot f_x + B$$

so, nämlich

$$f_x = B \cdot (1-A)^{\frac{x}{h}} \cdot (\Sigma(1-A)^{-\frac{x}{h}-1} + C)$$

d. h. (nach §. 57. N. 7.)

$$f_x = \frac{B}{A} + C\cdot(1-A)^{\frac{x}{h}},$$

indem man statt BC, welches willkührlich (periodisch) konstant ist, wiederum bloß C geschrieben hat.

§. 75.

Kennt man zwei specielle Werthe f_x' und f_x'', welche der reducirten linearen Gleichung der 2ten Ordnung

1) $f_{x+2h} + P_x \cdot f_{x+h} + Q_x \cdot f_x = 0$

genügen, so ist

2) $f_x = C' \cdot f_x' + C'' \cdot f_x''$,

wo C' und C'' zwei willkührliche (periodische) Konstanten sind, das allgemeine endliche Integral.

Denn die Gleichung 2.) macht, der Voraussetzung zufolge, die Gleichung 1.) identisch; und findet man aus der 2.) Δf_x, $\Delta^2 f_x$, so hat man nur drei Gleichungen, aus denen nicht mehr als zwei willkührliche Funktionen eliminirt werden können, um zu einer Differenzen-Gleichung der 2ten Ordnung zu gelangen; also ist das Integral auch das allgemeinste.

Hat man aber das (endliche) Integral der reducirten Gleichung 1.) gefunden, so kann man nun auch die Gleichung 2.) als das endliche Integral der vollständigen linearen Gleichung der 2ten Ordnung

3) $f_{x+2h} + P_x \cdot f_{x+h} + Q_x \cdot f_x = V_x$

ansehen, wenn man nur C' und C'' noch als Funktionen von x ansieht, welche durch die beiden Gleichungen

4) $f'_{x+h} \cdot \Delta C'_x + f''_{x+h} \cdot \Delta C''_x = 0$

und

5) $f'_{x+2h} \cdot \Delta C'_x + f''_{x+2h} \cdot \Delta C''_x = V_x$

gegeben sind, aus denen $\Delta C'_x$ und $\Delta C''_x$ als bekannte Funk-

tionen φ_x, ψ_x von x hergestellt werden können, um dann aus ihnen nach dem vorhergehenden Kapitel

$$C'_x = \Sigma\varphi_x + c' \quad \text{und} \quad C''_x = \Sigma\psi_x + c''$$

herzuleiten, wenn solches möglich ist.

Es ist dies ganz analog dem Verfahren, was bei der Integration der linearen Differenzial-Gleichungen gebraucht wird und dort unter dem Namen der „Methode der Variation der Konstanten" bekannt ist (Vgl. Syst. d. Math. Th. VI. §§. 370. bis 374.).

§. 76.

Die linearen und reducirten Differenzen-Gleichungen aller Ordnungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich sehr leicht integriren.

Ist z. B. die Gleichung der dritten Ordnung

$$1)\quad f_{x+3h} + \alpha \cdot f_{x+2h} + \beta \cdot f_{x+h} + \gamma \cdot f_x = 0$$

endlich zu integriren, so setzt man $f_x = m^x$, und erhält

$$2)\quad (m^h)^3 + \alpha \cdot (m^h)^2 + \beta \cdot m^h + \gamma = 0$$

löst diese kubische Gleichung auf, erhält drei Werthe für m^h, also auch drei Werthe m_1, m_2, m_3 von m, und hat dann als endliches Integral der Gleichung 1.) die Gleichung

$$3)\quad f_x = C' \cdot (m_1)^x + C'' \cdot (m_2)^x + C''' \cdot (m_3)^x,$$

wo C', C'', C''', drei willkührliche (periodische) Konstanten sind.

Ist $m_1 = m_2$, oder ist gar $m_1 = m_2 = m_3$, so treten ganz analoge Modifikationen ein, wie solche im Syst. d. Math. Th. VI. §§. 370 seqq. ausführlich beschrieben stehen.

Anmerkg. Diese Integration der reducirten linearen Differenzen-Gleichungen löst aber zugleich das Problem: „das rekurrente Gesetz derjenigen Reihen, welche die Geschichte der „Mathematik die rekurrirenden nennt, in ein independentes umzuwandeln." (S. §. 22. und Anmerkg. 2. zu §. 1.).

Nach den so eben angeführten Paragraphen würde man di

rekurrirende Reihe $S[f_a \cdot t^a]$ summiren, als Summe den Bruch $\frac{f_0}{1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3}$ erhalten (nach §. 22.), dann diesen Bruch in seine Partialbrüche $\frac{C'}{1-m_1 t}+\frac{C''}{1-m_2 t}+\frac{C'''}{1-m_3 t}$ zerlegen (während m_1, m_2, m_3 die drei Werthe von m sind, welche $m^3+\alpha m^2+\beta m+\gamma=0$ machen), und dann hätte man (nach §. 1. Anmerkg. 2.) für jede ganze Zahl a

$$f_a = C' \cdot (m_1)^a + C'' \cdot (m_2)^a + C''' \cdot (m_3)^a$$

und gerade dies geht auch aus dem Integral 3.) hervor, wenn man $h=1$ setzt und die dortigen willkührlichen Konstanten diesem speciellen Problem angemessen bestimmt.

§. 77.

Zur Bestimmung der bei der endlichen Integration einer Differenzen-Gleichung der m^{ten} Ordnung eingehenden m Konstanten C', C'', ꝛc. ꝛc., wie solche in einem besonderen Falle der Anwendung möglich und nothwendig wird, ist es ausreichend, wenn man m Glieder der Reihe

$$f_x, \quad f_{x+h}, \quad f_{x+2h}, \quad f_{x+3h}, \quad \cdots$$

für irgend einen bestimmten Werth von x kennt, weil man dadurch eben so viele Gleichungen als zu bestimmende Konstanten erhält; und dann sind die Konstanten absolute (und nicht periodische).

Auch begreift man sogleich aus dem Umstande, daß die periodischen Konstanten für die Werthe α, $\alpha+h$, $\alpha+2h$, $\alpha+3h$, ⋯ von x, stets dieselben Werthe annehmen, warum sich letztere offenbar dadurch nicht bestimmen lassen können, daß man die Werthe von f_x kennt, für die konstanten Werthe α, $\alpha+h$, $\alpha+2h$, ꝛc. ꝛc. von x.

Ist daher durch Integration einer Differenzen-Gleichung z. B. der ersten Ordnung, eine solche Konstante C eingegangen, welche nun eben so gut absolut wie periodisch seyn kann, so

kann man auch noch der Bedingung genügen, daß die durch die Integration gefundene Funktion f_x, von $x = \alpha$ an bis zu $x = \alpha + h$ hin alle Werthe mit einer anderen gegebenen Funktion φ_x gemein hat, während α irgend ein bestimmter konstanter Werth ist. *)

Löst man nämlich die gegebene Differenzen-Gleichung algebraisch nach Δf auf, so daß man erhält

1) $\Delta f_x = F_{x,f_x}$ oder $f_{x+h} = f_x + F_{x,f_x}$,

so folgt daraus, wenn man $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, rc. rc. statt x schreibt

2) $f_{x+2h} = f_{x+h} + F_{x,f_{x+h}}$

3) $f_{x+3h} = f_{x+2h} + F_{x,f_{x+2h}}$

u. s. w. f. — Kennt man nun für jeden Werth x', der zwischen α und $\alpha + h$ liegt, jedesmal den zugehörigen Werth von f_x, nämlich den Werth $f_{x'}$, so giebt, wenn man diesen Werth x' statt x setzt, die Gleichung 1.) sogleich den Werth $f_{x'+h}$, d. h. alle Werthe von f_x für alle Werthe von x, welche zwischen $\alpha + h$ und $\alpha + 2h$ liegen. Aber eben so geben nun die Gleichungen 2.), 3.) u. s. w. alle Werthe von f_x für alle Werthe von x, welche zwischen $\alpha + 2h$ und $\alpha + 3h$, zwischen $\alpha + 3h$ und $\alpha + 4h$, u. s. w. liegen.

Ist daher das Integral als eine Gleichung zwischen x, f_x und C gefunden, so muß man die gegebene Funktion φ_x, mit welcher die gesuchte Funktion f_x in der ganzen Strecke von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + h$ zusammenfallen soll, statt f_x setzen, aus der Gleichung dann

$$C = \psi_x$$

---

*) Stellt man sich x als Abscisse und f_x als Ordinate vor, die durch eine solche Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung gegeben ist, so kann man also verlangen, daß diese Kurve mit einer anderen gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ die ganze Strecke von $x = \alpha$ an bis zu $x = \alpha + h$ hin (und nicht bloß einzelne Punkte) gemein habe.

finden, zuletzt aber eine Funktion von $Sin\frac{2\mu\pi x}{h}$ und $Cos\frac{2\nu\pi x}{h}$ aufsuchen, welche für alle Werthe von x, die zwischen α und $\alpha+h$ liegen, genau mit ψ_x zusammenfällt, letztere aber statt C nehmen.

Daß und wie dieser letztere Theil der gegenwärtigen Untersuchung auszuführen ist, hat Fourier in seiner Théorée de la chaleur, à Paris 1822. zuerst gezeigt, und die daher rührenden sogenannten Fourier'schen Reihen bilden einen höchst wichtigen aggregirenden Theil der höhern Analysis, welche im nächsten Theile dieses Werkes behandelt werden.

Wir bemerken nur noch, daß die gegebene Funktion φ_x nicht einmal eine stetige Funktion von x zu seyn braucht, wenn man nur für alle Werthe von x zwischen α und $\alpha+h$, alle zugehörigen Werthe von f ausgedrückt hat, es mögen letztere dann in diesem Raume (von $x = \alpha$ bis $x = \alpha+h$) ein einziges Gesetz, oder nach und nach mehrere verschiedene Gesetze befolgen, d. h. sie mögen durch eine continuirliche oder durch eine discontinuirliche Funktion von x ausgedrückt seyn.

Anmerkg. Da die Differenz Δx oder h stets als ein bestimmter, nicht mehr veränderlicher Werth angesehen wird, so drückt jede Differenzen-Gleichung z. B. der ersten Ordnung nur den Uebergang aus von dem Zustande f_x zu dem bestimmt davon entfernten Zustande f_{x+h}. Jede Differenzen-Gleichung hat daher allemal eine Unstetigkeit (Discontinuität) der durch sie vorgestellten Funktion zu Grunde liegen. *)

*) Da in der Differenzen-Rechnung die Differenz Δx oder h allemal einen bestimmten Werth hat, so darf man aus der Gleichung

$$A_0+A_1 \cdot h+A_2 \cdot h^2+ \cdots = B_0+B_1 \cdot h+B_2 \cdot h^2+ \cdots$$

auch nicht folgern, daß $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, rc. rc. seyn müsse, weil diese Folgerung nur dann richtig ist, wenn diese erstere Gleichung entweder für jeden Werth von h gilt, oder doch für eine unendliche Menge stetig auf einander folgender Werthe von h.

§. 78.

Laplace hat noch Probleme behandelt von folgender Gattung:

„Eine Funktion φ zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß zwischen φ_f und φ_F eine bestimmte und gegebene Gleichung

I. $$G = 0$$

stattfindet, während f und F gegebene Funktionen von x sind, die wir durch f_x und F_x bezeichnen, so daß man

II. $$f = f_x$$ und III. $$F = F_x$$ hat."

Um solche Aufgabe zu lösen, führt Laplace einen neuen Veränderlichen z ein, welcher von x dergestalt abhängig gedacht wird, daß

IV. $f_x = u_z$ und V. $F_x = u_{z+1} = u_z + \Delta u_z$ für $\Delta z = 1$

wird, während u_z eine unbekannte und gesuchte Funktion von x ist. Eliminirt man nun aus beiden letztern Gleichungen den Veränderlichen x, so bekommt man eine Gleichung zwischen u_z und Δu_z, also eine endliche Differenzen-Gleichung

VI. $$\pi_{u,\Delta u} = 0.$$

Wird diese dann integrirt, so daß man

VII. $$u = u_z$$

erhält, so hat man die Funktion u_z mit einer willkührlichen Konstante, welche letztere man irgend wie annehmen kann, weil u_z nur ein eingeführter Hilfswerth ist. Die Gleichung IV. ($f_x = u_z$) giebt dann auch x in z ausgedrückt, also

VIII. $$x = x_z.$$

Hierauf sucht man eine Funktion y_z so, daß

IX. $\varphi_f = y_z$ und X. $\varphi_F = y_{z+1} = y_z + \Delta y_z$ für $\Delta z = 1$

wird, und zwar dadurch, daß man y_z statt φ_f und y_{z+1} d. h. $y_z + \Delta y_z$ statt φ_F in die gegebene Gleichung I. ($G = 0$) substituirt (so wie statt x, wenn solches (in $G = 0$)

noch explicit vorkommt, auch seinen Ausdruck in z aus VIII.); und die Gleichung $G = 0$ geht dadurch über in eine Differenzen-Gleichung

XI. $$\pi_{z,y,\Delta y} = 0.$$

Gelingt es nun, diese letztere zu integriren, so hat man y_z, also auch weil $\varphi_f = y_z$ gesetzt worden, φ_f in z, und wenn man statt z seinen Werth setzt, φ_f in x ausgedrückt, d. h. man hat eine Gleichung von der Form

XII. $$\varphi_f = \psi_x.$$

Weil aber f als eine Funktion von x gegeben ist (in II.), nämlich

$$f = f_x,$$

wo f_x ein gegebener Ausdruck in x ist, so darf man jetzt nur aus den beiden letztern Gleichungen x eliminiren, um φ_f in f ausgedrückt zu haben, also auch φ_v in v, wenn man v statt f schreibt.

Wäre z. B. statt der Gleichung $G = 0$ gegeben die Gleichung

1) $\varphi_x{}^2 = \varphi_{2x}+2,$

so hätte man in diesem Beispiele x und $2x$ statt der obigen f_x und F_x, also

2) $f_x = x$ und 3) $F_x = 2x.$

Man hat dann weiter

4) $x = u_z$ und 5) $2x = u_z+\Delta u_z;$

und, sobald x eliminirt wird, die Differenzen-Gleichung

6) $u_z+\Delta u_z = 2u_z$ d. h. $\Delta u_z = u_z$ für $\Delta z = 1.$

Diese Gleichung (nach §. 74. Anmerkg. 1.) integrirt, giebt

7) $u_z = C\cdot 2^z,$

also (aus 2.)

8) $x = C\cdot 2^z$ oder $x = 2^z.$

Hierauf hat man zur Bestimmung von y_z die beiden Gleichungen

9) $\varphi_x = y_z$ und 10) $\varphi_{2x} = y_z+\Delta y_z$ für $\Delta z = 1,$

welche in Verbindung mit der 1.) zur Gleichung

11) $y_z^2 = y_z + \Delta y_z + 2$ oder $y_{z+1} = y_z^2 - 2$

führt. Da nun, wenn man y_z von der Form $a^{(v_z)} + a^{(-v_z)}$ annimmt, $y_z^2 - 2 = a^{(2v_z)} + a^{(-2v_z)}$ und $y_{z+1} = a^{v_{z+1}} + a^{-v_{z+1}}$ wird, so wird der Gleichung 9.), dadurch, daß man einen neuen Veränderlichen v_z so einführt, daß

12) $y_z = a^{v_z} + a^{-v_z}$

wird, genügt, sobald man

13) $v_{z+1} = 2 \cdot v_z$, also $\Delta v_z = v_z$

nimmt, welche Gleichung integrirt,

14) $v_z = 2^z$

giebt, so daß man (aus 10.) erhält:

15) $y_z = a^{(2^z)} + a^{(-2^z)}$,

wo a noch eine willkührliche Konstante ist. Dies ist das endliche Integral der Gleichung 11.). Man hat also nun, wenn aus 9.) und 15.) und 8.) sowohl y_z als auch z eliminirt werden,

16) $\varphi_x = a^x + a^{-x}$,

oder, weil $f = x$ ist, $\varphi_f = a^f + a^{-f}$, also auch

17) $\varphi_v = a^v + a^{-v}$,

wo a eine willkührliche Konstante ist.

Anmerkg. 1. Wirft man aber einen Blick auf das Integrations-Verfahren der Gleichung 11.), so kann man nicht läugnen, daß man mit derselben Divinationsgabe, mit welcher die neue Funktion v_z eingeführt worden, sogleich auch direkt hätte errathen können, daß $b^x + b^{-x}$ die Funktion ist, welche statt φ_x gesetzt der Gleichung

$$\varphi_x^2 = \varphi_{2x} + 2$$

genügt, und dann wäre das ganze Verfahren überflüssig gewesen.

Anmerkg. 2. Gewöhnlich sieht man eine solche Gleichung $G = 0$ zwischen φ_{f_x} und φ_{F_x} unmittelbar als eine

Differenzen-Gleichung an, in welcher aber nicht x um h oder 1, sondern um eine Funktion Δx von x wächst, dergestalt, daß

$$f_{x+\Delta x} = F_x$$

wird, und man vergleicht dann diese Art von Differenzen-Gleichungen mit jenen Differenzial-Gleichungen, in denen das Differenzial dx nicht konstant, sondern selbst wieder veränderlich d. h. von der Form $\partial x_t \cdot dt$ ist, wo dt als konstant gedacht wird.

In dieser Beziehung muß man die gegenwärtige Aufgabe als ein Beispiel der Integration solcher Differenzen-Gleichungen ansehen, in welchen x nicht um etwas konstantes (h oder 1) wächst, sondern selbst noch um etwas Veränderliches, d. h. noch um eine Funktion von x.

§. 79.

Zuletzt wollen wir noch zwei Beispiele geben, wo eine Gleichung integrirt wird, welche zu dem „Kalkul mit gemischten Differenzen" gehört, in so ferne in ihr Δy_x mit ∂y_x gemischt vorkommt.

A. Es sey zu integriren die Gleichung

1) $\partial y_x + a \cdot \Delta y_x + b \cdot y_x = 0$ für $\Delta x = 1$,

welche in Bezug auf y_x, ∂y_x und Δy_x linear ist und konstante Koeffizienten hat.

Man setzt

2) $y = e^{mx}$,

hat $\partial y_x = m \cdot e^{mx}$ und $\Delta y_x = e^{mx} \cdot (e^m - 1)$; und die Gleichung 1.) geht dadurch über in

3) $m + a \cdot (e^m - 1) + b = 0$.

Findet man nun aus dieser Gleichung die unendlich-vielen Werthe m_1, m_2, m_3, m_4, 2c. 2c. von m, welche sie liefert, so kann man

4) $y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x} + C_3 \cdot e^{m_3 x} + C_4 \cdot e^{m_4 x} + \cdots$,

wo C_1, C_2, C_3, C_4, ꝛc. ꝛc. völlig willkührliche absolute Konstanten vorstellen, — als allgemeines Integral der Gleichung 1. ansehen.

B. Wäre aber zu integriren die Gleichung

1) $$\partial(\Delta y_x)_x + a \cdot \partial y_x + b \cdot \Delta y_x + c \cdot y_x = 0,$$

so würde man durch dasselbe Verfahren die Werthe m_1, m_2, m_3, ꝛc. ꝛc. von m aus der Gleichung

2) $$(m+b) \cdot (e^m - 1) + am + c = 0$$

zu entwickeln haben, während dann wiederum

3) $$y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x} + C_3 \cdot e^{m_3 x} + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

als das allgemeine Integral der Gleichung I. angesehen werden kann.

Anmerkg. Ist u eine Funktion von x und y, so kann man die Differenzen Δu_x, Δu_y (analog wie in der Differenzialrechnung) Partial-Differenzen nennen, so daß man als weitere Partial-Differenzen

$$\Delta^2 u_x, \quad \Delta(\Delta u_x)_y, \quad \Delta(\Delta u_y)_x, \quad \Delta^2 u_y$$

u. s. w. f. hat.

Man kann dann auch eine Gleichung zwischen solchen Partial-Differenzen und der Funktion u, so wie x und y selbst, gegeben sich denken, und solche integriren wollen, d. h. die Funktion $u = u_{x,y}$ daraus herleiten wollen.

Wenn es aber schon bei den einfachsten Differenzen-Gleichungen nur selten gelingt, ein Integral in endlicher Form herzustellen, so muß dies noch viel mehr in den zusammengesetzteren Untersuchungen der Fall seyn.

Wir wollen deshalb gegenwärtig auf diese hier nur angedeuteten Untersuchungen nicht weiter eingehen.

Sechstes Kapitel.

Einige Anwendungen der endlichen Differenzen- und der endlichen Summen- (Integral-) Rechnung.

§. 80.

Die nächste Anwendung, welche man von den in diesem Kapitel vorgetragenen Lehren macht, ist die tabellarische Berechnung der Werthe einer Funktion f_x, wie solche nach und nach zu den Werthen $\cdots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \cdots$ oder zu den Werthen

$$4{,}1; \quad 4{,}2; \quad 4{,}3; \quad 4{,}4; \cdots 4{,}9$$

oder allgemein zu den Werthen

$$\alpha, \quad \alpha+h, \quad \alpha+2h, \quad \alpha+3h, \cdots$$

von x, gehören.

A. Ist nämlich die Funktion f_x eine algebraische ganze rationale vom m^{ten} Grade, so werden Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\cdots$ $\Delta^m f_x$ eben solche Funktionen vom bezüglich $(m-1)^{ten}$, $(m-2)^{ten}$, $\cdots$ 0ten Grade seyn, während $\Delta^{m+1} f_x$, $\Delta^{m+2} f_x$, ꝛc. ꝛc. alle der Null gleich seyn werden (S. §. 61.). Denkt man sich nun f_x als das allgemeine Glied einer Ur-Reihe, so sind (nach §. 51.) Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, ꝛc. ꝛc. die allgemeinen Glieder ihrer 1ten, 2ten, 3ten, ꝛc. ꝛc. Differenz-Reihen und ihre m^{te} Differenz-Reihe hat lauter konstante Glieder, von denen jedes dem konstanten Werthe von $\Delta^m f_x$ gleich ist. — Geht man nun von letzterer als einer bekannten Reihe aus, so lassen sich rückwärts

gehend, aus den für $x = \alpha$ bekannten Gliedern $\Delta^{m-1}f_\alpha$, $\Delta^{m-2}f_\alpha$, $\Delta^{m-3}f_\alpha$, ... $\Delta^2 f_\alpha$, Δf_α und f_α bezüglich ihrer 1ten, 2ten, 3ten, ... $(m-2)^{ten}$, $(m-1)^{ten}$, m^{ten} Summen-Reihe, diese Summen-Reihen selbst mittelst der Gleichung

$$\Delta^p u_{r+1} = \Delta^p u_r + \Delta^{p+1} u_r$$

durch bloße Addition bilden, während die m^{te} Summen-Reihe keine andere als die gesuchte Reihe

$$f_\alpha, \quad f_{\alpha+h}, \quad f_{\alpha+2h}, \quad f_{\alpha+3h}, \quad \ldots$$

ist.

B. Ist aber die Funktion f_x eine beliebige andere Funktion z. B. *log* x, *Sin* x, *Cos* x, *log Sin* x, *log Cos* x, oder dergl., so muß man jedes folgende Glied f_{x+h} aus dem vorhergehenden f_x dadurch finden, daß man die Gleichung

$$f_{x+h} = f_x + \Delta f_x$$

zu Hilfe nimmt, für Δf_x aber in jedem besonderen Falle, d. h. für jede besondere Funktion f_x eine Reihe auffindet, welche für kleine Werthe von h so schnell convergirt, daß ein oder zwei Glieder der Reihe ausreichen, um Δf_x für jeden Werth von x so genau zu geben als man es wünscht.

Man kann aber auch häufig das im §. 64. beschriebene Verfahren eintreten lassen.

Näheres im „Lehrbuch der gesammten höhern Mathematik in zwei Bänden. Leipzig 1839. Bd. II. pagg. 418—426.

§. 81.

Eine zweite Anwendung der Differenzen-Rechnung findet statt auf die Interpolation der Reihen, d. h. auf Lösung der Aufgabe:

„Man kennt n Glieder einer Reihe; man soll zwischen je „zwei Gliedern derselben noch eine Anzahl m von Gliedern ein„schalten oder interpoliren."

A. Man begreift zunächst, daß das Problem, so allgemein ausgesprochen, ein völlig unbestimmtes ist, eben weil das Gesetz, nach welchem die n gegebenen Glieder sich richten, nicht mit gegeben ist, also auch kein Gesetz bekannt ist, nach welchem sich die einzuschaltenden Glieder richten sollen.

Man würde aber das Gesetz haben, wenn man eine Funktion f_x von x hätte, und dabei wüßte, daß die n gegebenen Glieder

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots \quad u_n,$$

Werthe von f_x sind, welche zu den gegebenen Werthen

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots \quad x_n$$

von x, gehören.

Nimmt man aber eine Funktion f_x von ganz beliebiger Form an (also entweder eine algebraische, rationale oder irrationale, oder eine beliebige transcendente), jedoch mit n unbestimmt gelassenen Konstanten k_1, k_2, $\cdots$ k_n, — setzt man also

$$f = f_{x, k_1, k_2, \cdots k_n}$$

und in diese Gleichung nun rechts statt x nach und nach die Werthe x_1, x_2, x_3, $\cdots$ x_n, links aber gleichzeitig statt f nach und nach bezüglich die Werthe u_1, u_2, u_3, $\cdots$ u_n, so hat man n Gleichungen, aus denen sich die n Unbekannten k_1, k_2, k_3, $\cdots$ k_n im Allgemeinen werden finden lassen. Dadurch ist denn ein Gesetz gefunden, nach welchem sich die Glieder der gegebenen Reihe richten, und nach welchem nun beliebig viel Glieder derselben Reihe noch berechnet werden können, die zu Werthen von x gehören, welche zwischen z. B. den beiden Werthen x_2 und x_3 liegen, so daß man eben deshalb diese neuen Werthe von f_x als zwischen u_2 und u_3 liegend, ansehen kann.

Jede neue Form aber, die man für f_x wählt (bei dem eben beschriebenen Verfahren) giebt ein neues Gesetz der gegebenen Reihe

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots \quad u_n,$$

so daß man nun andere Zwischen-Glieder bekommt, während die gegebenen Glieder immer dieselben bleiben*).

B. Gewöhnlich aber denkt man sich unter dem Gesetze f_x der gegebenen Reihe

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots \quad u_n$$

eine algebraische rationale ganze Funktion von x, so daß man

$$f_x = k_1 \cdot x^{n-1} + k_2 \cdot x^{n-2} + k_3 \cdot x^{n-3} + \cdots + k_{n-1} \cdot x + k_n$$

nimmt, und nun die Koeffizienten $k_1, k_2, k_3, \cdots k_n$ den Bedingungen gemäß bestimmt, daß f_x für $x = x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ bezüglich die Werthe $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ annehmen soll.

Oder man benutzt vielleicht von der gegebenen Reihe $u_1, u_2, u_3, \cdots$ eine geringere Anzahl m von Gliedern (wo $m < n$ ist) und denkt sich nun f_x bloß vom $(m-1)^{ten}$ Grade, so daß man

$$f_x = k_1 \cdot x^{m-1} + k_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + k_m$$

nimmt, und nun die Konstanten $k_1, k_2, \cdots k_m$ aus den m Gleichungen bestimmt, welche erhalten werden, wenn man statt x die Werthe $x_1, x_2, x_3, \cdots x_m$, — statt f_x aber gleichzeitig bezüglich die Werthe $u_1, u_2, u_3, \cdots u_m$ in die vorstehende Gleichung substituirt.

Diese geringere Anzahl m von Gliedern wird man aber dann allemal nur benutzen, wenn die $n+1-m$ Glieder der $(m-1)^{ten}$ Differenz-Reihe, welche aus den n gegebenen Gliedern der Ur-Reihe

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots \quad u_n$$

sich bilden lassen, alle einander gleich werden, — eben weil nun

---

*) Denkt man sich x als Abscisse und f_x als Ordinate, so geben die verschiedenen Funktionen f_x eben so viele verschiedene Kurven, welche aber alle dieselben n Punkte mit einander gemein haben, deren Koordinaten-Werthe bezüglich x_1, u_1; x_2, u_2; x_3, u_3; $\cdots$ x_n, u_n sind.

die n Glieder als Werthe einer ganzen Funktion vom $(m-1)^{ten}$ Grade nur erscheinen (nach §. 61.).

C. Für den in B. gedachten Fall nimmt Lagrange eine Form der gesuchten ganzen Funktion, welche augenblicklich als die richtige erkannt wird, bei deren bloßen Ansicht.

Soll nämlich z. B. das Gesetz f_x so seyn, daß es die vier Werthe u_1, u_2, u_3, und u_4 liefert, so oft statt x bezüglich die Werthe x_1, x_2, x_3 und x_4 gesetzt werden, so hat man

$$\text{I.}\quad f_x = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\cdot u_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}\cdot u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\cdot u_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\cdot u_4$$

als das Gesetz der Reihe, d. h. als die gesuchte Interpolationsformel; denn man erkennt sogleich: erstens, daß die Funktion f_x vom dritten Grade nach x wird, wenn man sie ordnet, und zweitens, daß sie auch den Werth u_1 annimmt für $x = x_1$, sowie den Werth u_2 für $x = x_2$, u. s. f.*)

---

*) Ein anderes Gesetz d. h. eine andere Interpolationsformel würde man für dasselbe Beispiel haben, wenn man für f_x die transcendente Funktion

$$f_x = u_1 \cdot \frac{Sin\, p(x-x_2)\cdot Sin\, q(x-x_3)\cdot Sin\, r(x-x_4)}{Sin\, p(x_1-x_2)\cdot Sin\, q(x_1-x_3)\cdot Sin\, r(x_1-x_4)} + u_2 \cdot \frac{Sin\, p'(x-x_1)\cdot Sin\, q'(x-x_3)\cdot Sin\, r'(x-x_4)}{Sin\, p'(x_2-x_1)\cdot Sin\, q'(x_2-x_3)\cdot Sin\, r'(x_2-x_4)} + u_3 \cdot \frac{Sin\, p''(x-x_1)\cdot Sin\, q''(x-x_2)\cdot Sin\, r''(x-x_4)}{Sin\, p''(x_3-x_1)\cdot Sin\, q''(x_3-x_2)\cdot Sin\, r''(x_3-x_4)} + u_4 \cdot \frac{Sin\, p'''(x-x_1)\cdot Sin\, q'''(x-x_2)\cdot Sin\, r'''(x-x_3)}{Sin\, p'''(x_4-x_1)\cdot Sin\, q'''(x_4-x_2)\cdot Sin\, r'''(x_4-x_3)}$$

nehmen wollte, oder irgend eine andere aus der allgemeinen Form

$$f_x = u_1\cdot X_1 + u_2\cdot X_2 + u_3\cdot X_3 + u_4\cdot X_4$$

dadurch hervorgehende Funktion, daß man für X_1, X_2, X_3, X_4 ganz

Es ist leicht diese Form von f_x sich zu denken, wenn m Glieder der gegebenen Reihe $u_1, u_2, \cdots$ benutzt werden sollen.

Laplace, der von dem Princip der allmähligen Annäherung ausgieng, setzt zur Bildung derselben ganzen Funktion f_x

$$\text{II.} \quad f_x = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1 + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta^3 u_1 + \cdots$$

und findet nun aus dieser Gleichung δu_1, indem er x_2 statt x setzt und gleichzeitig u_2 statt f_x; dann $\delta^2 u_1$, indem er x_3 statt x und gleichzeitig u_3 statt f_x setzt; ferner $\delta^3 u_1$, indem x_4 statt x gesetzt wird, u. s. w. f.

Denkt man sich die Werthe $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ alle um gleichviel, nämlich um h von einander verschieden, so daß z. B.

$$x_m = \alpha + (m-1)h \quad \text{ist für} \quad m = 1, 2, 3, \cdots n,$$

so giebt die Gleichung §. 54. N. 2. sogleich die verlangte Interpolationsformel, sobald man α statt x, und $\frac{x-\alpha}{h}$ statt n, endlich $\Delta^a u_1$ statt $\Delta^a f_x$ schreibt, nämlich

$$\text{III.} \quad f_x = S\left[\left(\frac{x-\alpha}{h}\right)_a \cdot \Delta^a u_1\right] = S\left[\frac{(x-\alpha)^{a|-h}}{a!\ h^a}\cdot \Delta^a u_1\right]$$

d. h.

$$f_x = u_1 + \frac{x-\alpha}{h}\cdot\Delta u_1 + \frac{(x-\alpha)(x-\alpha-h)}{2!\ h^2}\cdot\Delta^2 u_1 + \frac{(x-\alpha)(x-\alpha-h)(x-\alpha-2h)}{3!\ h^3}\cdot\Delta^3 u_1 + \text{rc. rc.},$$

wo $u_1, \Delta u_1, \Delta^2 u_1, \Delta^3 u_1$, rc. rc., die ersten Glieder bezüglich der Ur-Reihe u_1, u_2, u_3, u_4, rc. rc. und ihrer ersten, zweiten, dritten rc. rc. Differenz-Reihen sind. *)

---

beliebige Funktionen von x herauswählt, welche jedesmal bis auf eine, die $= 1$ wird, der Null gleich werden, so oft man $x = x_1, x_2, x_3$ oder x_4 nimmt.

*) S wie man nämlich in die Gleichung III. $\alpha + mh$ statt x setzt,

Und diese Formel wird noch einfacher, wenn man $\alpha = 0$ und $h = 1$ nimmt, d. h. wenn man sich vorstellt, daß die gegebenen Glieder $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ die Werthe einer ganzen Funktion f_x sind, welche bezüglich zu den Werthen $0, 1, 2, 3, \cdots n$ von x, gehören.

Anmerkg. Noch Näheres über das Interpoliren findet man in dem „Lehrbuch d. ges. höh. Math. in zwei Bd." Bd. II. pagg. 426—437.

§. 82.

Eine dritte Anwendung der Differenzen- und Summen-Rechnung findet auf die Summation (vorzüglich endlicher) Reihen statt.

Da nämlich (nach §. 54. N. 4.)

$$(\odot)\cdots \quad f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots + f_{x+(n-1)h} = \Sigma f_{x+nh} - \Sigma f_x$$

ist, wo Σf_{x+nh} das vorstellt, was aus Σf_x wird, so oft man $x+nh$ statt x schreibt, so folgt, daß die Summe der n Glieder der Reihe zur Linken dann allemal gefunden ist, so oft es gelingt Σf_x herzustellen. Benutzt man daher die Resultate der §§. 57—59. so hat man sogleich die Summen folgender endlichen Reihen, nämlich

$$1) \quad a^x + a^{x+h} + a^{x+2h} + \cdots + a^{x+(n-1)h} = \frac{a^{x+nh} - a^x}{a^h - 1},$$

welches die Summe einer aus n Gliedern bestehenden geometrischen Reihe ist;

---

so giebt diese Gleichung auf der rechten Seite die Reihe $S[m_a \cdot \Delta^a u_1]$ und dies ist nach §. 37. N. 2. dem Gliede u_{1+m} gleich. Es wird also wirklich $f_x = u_{1+m}$, so wie man $x = \alpha + mh$ nimmt, wie solches von der Funktion f_x verlangt wurde; und benutzt man $1+m$ Glieder der Reihe $u_1, u_2, u_3, \cdots$, so hat die m^{te} Differenz-Reihe noch ein einziges Glied, also ist m der größeste Werth, den a erhalten kann, und die ganze Funktion f_x, welche man auf diesem Wege erhält, ist daher vom m^{ten} Grade.

2) $x^{m|h}+(x+h)^{m|h}+(x+2h)^{m|h}+\cdots+[x+(n-1)h]^{m|h}$
$$= \frac{[x+(n-1)h]^{m+1|h}-(x-h)^{m+1|h}}{(m+1)h};$$

3) $x^{m|-h}+(x+h)^{m|-h}+(x+2h)^{m|-h}+\cdots+[x+(n-1)h]^{m|-h}$
$$= \frac{(x+nh)^{m+1|-h}-x^{m+1|-h}}{(m+1)h},$$

wenn nur (in 2. und 3.) m positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Für die Summe von n Binomial-Koeffizienten findet sich, für $\Delta x = h = 1$,

4) $x_m+(x+1)_m+(x+2)_m+\cdots+(x+n-1)_m$
$$= (x+n)_{m+1}-x_{m+1}.$$

Ferner findet sich

5) $Cos\, x+Cos(x+h)+Cos(x+2h)+\cdots+Cos(x+(n-1)h)$
$$= \frac{Sin\tfrac{1}{2}nh \cdot Cos(x+\tfrac{1}{2}(n-1)h)}{Sin\tfrac{1}{2}h};$$

6) $Sin\, x+Sin(x+h)+Sin(x+2h)+\cdots+Sin(x+(n-1)h)$
$$= \frac{Sin\tfrac{1}{2}nh \cdot Sin(x+\tfrac{1}{2}(n-1)h)}{Sin\tfrac{1}{2}h}.$$

Eben so finden sich noch die Summen sehr vieler endlicher Reihen, namentlich auch der figurirten Reihen (welche wir zu Anfang des II. Th. dieses Werkes auf anderem und indirekten Wege bereits gefunden haben) direkt.

Anmerk. Man kann auch folgende Betrachtung anstellen. Bezeichnet man nämlich, wenn f_z das allgemeine Glied einer Reihe ist, die Summe der ersten z Glieder durch s_z, so hat man

1) $f_0+f_1+f_2+\cdots+f_{z-1} = s_z$

und demnach auch

2) $f_0+f_1+f_2+\cdots+f_z = s_{z+1}$,

folglich $s_{z+1}-s_z = f_z$

d. h. $\Delta s_z = f_z$ für $\Delta z = 1$;
und

3) $$s_z = \Sigma f_z + C \quad \text{für} \quad \Delta z = 1,$$

wo C eine zu bestimmende Konstante ist, welche daraus bestimmt wird, daß s_z für $z = 1$ in f_0 übergehen muß.

Von diesem Resultate 3. aus kann man aber auch wieder die obige Formel (⊙) erhalten. Denkt man sich nämlich unter f_m in N. 1. den Werth der Funktion f_x vorgestellt, wenn $x+mh$ statt x gesetzt wird, so daß f_0 (in N. 1.) die Funktion f_x selber bedeutet, — so ist s_z die Summe der z Glieder zur Linken in der obigen Formel (⊙). Die N. 3. giebt aber jetzt

$$s_z = \Sigma f_{x+zh} + C \quad \text{für} \quad \Delta z = 1,$$

also auch

4) $$s_z = [\Sigma f_x]_{x+zh} + C \quad \text{für} \quad \Delta x = h,$$

weil $x+nh$ um dasselbe h wächst, ob n in $n+1$, oder x in $x+h$ übergeht. Setzt man nun hier $z = 1$, so geht s_z in das erste Glied f_0 der Reihe 1.) d. h. in die Funktion f_x über, und man hat

5) $$f_x = [\Sigma f_x]_{x+h} + C$$

während $[\Sigma f_x]_{x+h} = \Sigma f_x + \Delta(\Sigma f_x)$ d. h. $\Sigma f_x + f_x$ ist, so daß die 5.) in

6) $$0 = \Sigma f_x + C$$

übergeht. Zieht man nun die 6.) von der 4.) ab, und setzt man noch $z = n$, so hat man genau wieder die obige Formel (⊙).

§. 83.

Hat man aber die Summe von n Gliedern einer Reihe gefunden, und giebt diese Summe noch einen im Kalkul zulässigen Ausdruck, so wie $n = \infty$ gesetzt wird, also nichts Unendlich-

Großes, nichts Unbestimmtes (und auch keine der Formen $\frac{1}{0}$, $log\,0$, 0^0, u. dgl., was jedoch hier ohnedieß nicht stattfinden kann), so hat man zugleich auch die Summe derselben Reihe von unendlich-vielen Gliedern, also die Summe einer unendlichen Reihe gefunden.

Näheres noch im „Lehrbuch der ges. höh. Math. in zwei Bd.“ II. Bd. pag. 237 seqq.

Dritte Abhandlung.

Theorie der numerisch-bestimmten Integrale.

Siebentes Kapitel.

Theorie der numerisch-bestimmten Integrale.

§. 84.

Wenn nicht beständig zwei ganz verschiedene Begriffe mit einander verwechselt werden sollen, so muß man sie auch in der Bezeichnung (und Benennung) von einander unterscheiden.

Wir unterscheiden daher in der Folge sehr sorgfältig von einander

1) das allgemein-bestimmte Integral $\int_{b \div a} f \cdot dx$ von

2) dem numerisch-bestimmten Integral $\int_a^b f \cdot dx$.

Wir verstehen von nun an unter dem ersteren die Differenz $\varphi_b - \varphi_a$ der beiden Werthe von $\varphi_x = \int f \cdot dx$, für $x = b$ und für $x = a$ genommen; während wir unter dem letzteren die Summe der unendlich-vielen unendlich-kleinen Produkte uns denken, welche alle den gemeinschaftlichen unendlich-kleinen Faktor $dx = \frac{b-a}{n}$ haben, wo n positiv ganz und unendlich-groß gedacht wird, — während der erste Faktor in allen diesen Produkten durch die Werthe von f_x gebildet wird, für alle um das Unendlich-Kleine $dx = \frac{b-a}{n}$ sich ändernde Werthe von x genommen, welche durch a, $a+dx$, $a+2dx$, $a+3dx$, 2c. 2c. $a+(n-1)dx$ (oder $b-dx$) ausgedrückt sind.

Sind die Grenzen dieses numerisch-bestimmten Integrals $\int_a^b f \cdot dx$ reell, so ist dx stets positiv, wenn $b > a$, da-

gegen stets negativ, wenn $b < a$ ist. — Ist eine der Grenzen a und b, oder ist jede derselben imaginär und von der Form $p+q\cdot i$, so ist dx in der Regel auch imaginär, aber doch stets unendlich-klein, d. h. von der Form $r\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)$, aber $r = \frac{1}{\infty}$ *).

Uebrigens nennen wir von nun an das numerisch-bestimmte Integral, immer nur schlechthin das bestimmte, unterscheiden also nur zwischen dem bestimmten Integral $\int_a^b f\cdot dx$ (schlechthin) und dem **allgemein-bestimmten** $\int_{b+a} f\cdot dx$.

Während also $\int_{b+a} f\cdot dx$ ein Operationszeichen ist, welches die Reihe der Operationen (und den dadurch hervorgebrachten Ausdruck) anzeigt, die mit f_x vorgenommen werden müssen, um nach und nach φ_x und $\varphi_b - \varphi_a$ zu erhalten, — drückt $\int_a^b f\cdot dx$ bloß aus, daß eine Summe von unendlich-vielen un-

---

*) Man kann auch noch einen andern Begriff des numerisch-bestimmten Integrals $\int_{\alpha+\beta\cdot i}^{\gamma+\delta\cdot i} f\cdot dx$ zwischen imaginären Grenzen aufstellen, wenn man nämlich darunter die Summe der unendlich-vielen unendlich-kleinen Produkte $f\cdot dx$ versteht, welche erhalten werden, wenn man $x = z+\varphi\cdot i$ setzt und unter φ eine ganz beliebige Funktion φ_z von z sich denkt, jedoch der Bedingung unterworfen, daß

$\varphi_z = \beta$ wird für $z = \alpha$,

und $\varphi_z = \delta$ wird für $z = \gamma$,

während statt z selbst nach und nach alle durch α, $\alpha+dz$, $\alpha+2dz$, $\alpha+3dz$, ... $\alpha+(n-1)dz$ ausgedrückten Werthe gesetzt gedacht werden, dabei aber $dz = \frac{\beta-\alpha}{n}$ und n positiv und unendlich-groß genommen wird.

Bei einer anderen Gelegenheit wollen wir einige dahin bezügliche Untersuchungen mittheilen und hier nur noch bemerken, daß der obige Begriff des Textes in dem hier so eben aufgestellten auch formell enthalten ist, wenn man $\varphi_z = \frac{\delta-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot z$ nimmt.

endlich-kleinen Summanden vorhanden ist, ohne daß das Zeichen zugleich angiebt, wie solche Summe ausgewerthet werden könne.

In den nachfolgenden Paragraphen setzen wir immer zunächst nur reelle Grenzen voraus, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

§. 85.

Das bestimmte Integral $\int_a^b f \cdot dx$ hat allemal einen bestimmten endlichen Werth, so oft f_x für keinen der Werthe von x, von $x = a$ an bis $x = b$ hin, sein Daseyn unterbricht (d. h. nicht eine im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$, $log\,0$, &c. in sich aufnimmt) und a und b endlich sind.

Beweis. Nimmt f_x für alle Werthe von x, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin, lauter reelle Werthe an, und ist G der größeste, so wie K der kleinste derselben, so ist, wenn $\frac{b-a}{n} = dx$ und n zwar unendlich-groß aber die Anzahl aller zu summirenden Werthe von $f_x \cdot dx$ ist, — offenbar

$$\int_a^b f \cdot dx < n \times G \cdot dx \qquad \text{und} \qquad > n \times K \cdot dx$$

$$\text{d. h.} < G(b-a) \qquad \text{und} \qquad > K(b-a),$$

weil $n \cdot dx = b-a$ ist; und es liegt also die Summe $\int_a^b f \cdot dx$ zwischen diesen reellen endlichen und bestimmten Grenzen, ist also selber endlich und reell *).

---

*) Wäre $b-a$ unendlich-groß, also b allein oder a allein (positiv oder negativ aber an sich) unendlich-groß, oder wären beide Grenzen unendlich-groß mit entgegengesetztem Vorzeichen (so daß $b-a$ nicht unbestimmt, sondern entschieden unendlich-groß würde) — so wäre die Summe $\int_a^b f \cdot dx$, dem Obigen zufolge, nothwendig ebenfalls unendlich-groß, wenn nicht K d. h. der kleinste der Werthe von f_x, unendlich-klein ist. — Ist aber K d. h. der kleinste der Werthe von f_x, unendlich-klein, so müssen doch auch noch an-

Sind aber die Werthe von f_x nicht alle reell, sondern reell oder imaginär, aber von der Form $P+Q\cdot i$, so ist

$$\int_a^b f\cdot dx = \Sigma P\cdot dx + i\cdot\Sigma Q\cdot dx$$

wo $\Sigma P\cdot dx$ die Summe aller reellen Theile, dagegen $i\cdot\Sigma Q\cdot dx$ die Summe aller imaginären Theile enthält. Ist nun G der größte und K der kleinste aller Werthe P, und ist G_1 der größte und K_1 der kleinste aller Werthe von Q, so ist wiederum die aus n Gliedern bestehende Summe $\Sigma P\cdot dx$ zwischen den Grenzen $n\times G\cdot dx$ d. h. $G\times n\cdot dx$ d. h. $G\cdot(b-a)$ und $n\times K\cdot dx$ d. h. $K(b-a)$, während aus demselben Grunde $\Sigma Q\cdot dx$ zwischen den Grenzen $G_1(b-a)$ und $K_1(b-a)$ liegt; also liegt der reelle Theil von $\int_a^b f\cdot dx$ für sich, wie auch der Koeffizient von i im imaginären Theil für sich, zwischen bestimmten endlichen reellen Grenzen.

Die Werthe P und Q können auch unstetig seyn *).

---

dere Bedingungen erfüllt seyn, wenn $\int_a^b f\cdot dx$ einen endlichen Werth haben soll (S. §. 91.).

*) Nehmen wir beispielsweise

$$f_x = 3x^2-2x+\sqrt{x-c}+\sqrt{x-c'}$$

und $b>c'>c>a$, so hat man für jeden Werth von x, der zwischen a und c liegt, $P = 3x^2-2x$ und $Q = \sqrt{c-x}+\sqrt{c'-x}$; dagegen hat man für alle Werthe von x, welche zwischen c und c' liegen,

$$P = 3x^2-2x+\sqrt{x-c} \quad \text{und} \quad Q = \sqrt{c'-x};$$

endlich ist für alle Werthe von x, welche zwischen c' und b liegen

$$P = 3x^2+2x+\sqrt{x-c}+\sqrt{x-c'} \quad \text{und} \quad Q = 0.$$

Aus diesem Beispiele geht also hervor, wie die Werthe P verschiedenen Funktionen von x angehören können und wie dasselbe mit den Werthen Q der Fall ist; die Werthe P und Q sind hier in diesem Beispiele (an gegewissen Stellen) discontinuirlich (unstetig, nicht stetig).

§. 86.

Das bestimmte Integral $\int_a^b f \cdot dx$, so oft es einen bestimmten endlichen Werth hat, ist allemal dem allgemein-bestimmten Integrale $\int_{b \div a} f \cdot dx$ gleich, d. h. das letztere drückt diesen bestimmten endlichen Werth der ersteren Summe aus *).

Beweis. Denn es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn $\int f_x \cdot dx = \varphi_x$, also φ_x so gedacht ist, daß $\partial\varphi_x = f_x$, also auch $\partial^2\varphi_x = \partial f_x$, ꝛc. ꝛc. ist,

1) $\varphi_{x+h} - \varphi_x = f_x \cdot h + \frac{1}{2}\partial f_x \cdot h^2 + \frac{1}{6}\partial^2 f_x \cdot h^3 + \frac{1}{24}\partial^3 f_x \cdot h^4 + \cdots$.

Setzt man nun hier herein das unendlich-kleine $dx \left(= \frac{b-a}{n}\right.$, wo $\left. n = \infty\right)$ statt h, gleichzeitig aber nach und nach a, $a+dx$, $a+2dx$, ꝛc., zuletzt $a+(n-1)dx$ (oder $b-dx$) statt x, und addirt man alle diese n Gleichungen, so erhält man

2) $\varphi_b - \varphi_a = \int_a^b f_x \cdot dx + \frac{1}{2}\int_a^b \partial f_x \cdot dx^2 + \frac{1}{6}\int_a^b \partial^2 f_x \cdot dx^3 + \cdots$

wenn $\int_a^b \partial f_x \cdot dx^2$, $\int_a^b \partial^2 f_x \cdot dx^3$, ꝛc. ꝛc. ebenfalls die Summe aller (n) unendlich-vielen, bezüglich durch $\partial f_x \cdot dx^2$, $\partial^2 f_x \cdot dx^3$, ꝛc. ꝛc. vorgestellten Glieder bezeichnen. Hat nun $\int_a^b f_x \cdot dx$ einen bestimmten endlichen Werth, so sind die folgenden Glieder

*) Es wäre aber sehr unrichtig, wenn man daraus, daß $\int_{b \div a} f \cdot dx$ einen bestimmten Werth hat, schließen wollte, daß nun auch die Summe $\int_a^b f \cdot dx$ diesen Werth haben müsse, eben so wie man aus dem Umstande, daß $\frac{1}{1+x}$ einen bestimmten endlichen Werth hat, z. B. für $x = 2$, nicht folgern kann, daß die unendliche Reihe $1 - x + x^2 - x^3 +$ in inf. für $x = 2$ denselben Werth haben müsse, obgleich der Werth der letztern, wenn er existirt, dem Werthe von $\frac{1}{1+x}$ allemal gleich ist.

der Reihe rechts unendlich-klein (im Allgemeinen bezüglich von der 1ten, 2ten, ꝛc. ꝛc. Ordnung), da selbst dann, wenn ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ꝛc. für irgend einen Zwischenwerth von x die Form $\frac{1}{0}$ annehmen sollten, die gebrochene Potenz dx^μ an die Stelle von dx^2, dx^3, ꝛc. kommen würde, während $\mu > 1$ seyn müßte (Vgl. Syst. d. Math. IV. Th. §§. 100. 101.).

Weil aber der Ausdruck zur Linken, nämlich $\varphi_b - \varphi_a$, der gemachten Voraussetzung zufolge eben das ist, was wir stets durch $\int_{b \div a} f \cdot dx$ bezeichnen, so ist der Satz erwiesen.

Nach diesem Beweise gilt zu gleicher Zeit derselbe Satz, es mag $b-a$ endlich oder unendlich-groß seyn, wenn nur die Bedingung erfüllt ist, daß $\int_a^b f \cdot dx$ wirklich einen bestimmten endlichen Werth hat, (was aber nicht allemal daran erkannt werden kann, daß $\int_{b \div a} f \cdot dx$ einen bestimmten endlichen Werth annimmt) und wenn nur dx unendlich-klein gedacht ist, weshalb, wenn $b-a = m = \infty$ ist, dann (in $dx = \frac{b-a}{n}$ der Nenner) n von der Form m^μ gedacht werden muß, wo $\mu > 1$ ist.*)

§. 87.

Der Beweis dieses Satzes führt zu demselben Ziele, wenn man den Begriff des bestimmten Integrals dahin verallgemeinert,

*) Verfolgt man diesen Beweis mit Aufmerksamkeit, so erkennt man bald, daß er auch dann noch gilt, wenn die Grenzen a und b imaginär sind (wo dx von der Form $e^{\psi \cdot i} \cdot dr$ d. h. $(Cos\,\psi + i \cdot Sin\,\psi) \cdot dr$ seyn wird), wenn nur vorher nachgewiesen ist, daß $\int_a^b f \cdot dx$ wirklich einen bestimmten Werth hat, weil dann die folgenden Glieder der Reihe 2.) immer unendlich-klein seyn werden, und die imaginären Unendlich-Kleinen gegen das Endliche und gegen die Unendlich-Kleinen der niederern Ordnungen eben so verschwinden wie die reellen (S. Einleitg. §. 17. u. §. 18.).

daß man unter $\int_a^b f_x \cdot dx$ die Summe

$$f_a \cdot \varepsilon_1 + f_{a+\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_2 + f_{a+\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \varepsilon_3 + f_{a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} \cdot \varepsilon_4 + \cdots + f_{b-\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n$$

sich denkt, wo die Anzahl der Summanden $= n$ und n unendlich-groß gedacht ist, wo ε_1, ε_2, $\cdots$ ε_n, die n, jetzt einander ungleich gedachten Werthe von dx und so sind, daß $a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_n = b$ ist, und wenn dabei alle positiv gedacht sind, so oft $b>a$, und alle negativ, so oft $b<a$ ist. — Man muß nur dann in der Gleichung 1. des §. 86. statt h nach und nach ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, $\cdots$ ε_n, gleichzeitig aber statt x bezüglich a, $a+\varepsilon_1$, $a+\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, ꝛc. ꝛc. substituiren, zuletzt aber alle n Gleichungen wiederum addiren.

Dieser letztere Begriff von $\int_a^b f \cdot dx$ führt also zu demselben Werthe $\int_{b \div a} f \cdot dx$, wenn das bestimmte Integral überhaupt einen Werth hat; weshalb wir in der Folge in der Summe $\int_a^b f \cdot dx$ den Faktor dx, d. h. die Zuwachse der Werthe von x beliebig einander gleich oder einander ungleich uns denken, nur allemal unendlich-klein *).

Es ist also auch für diesen allgemeineren Begriff des bestimmten Integrals doch noch allemal

$$(\odot)\cdots \qquad \int_a^b f_x \cdot dx = \int_{b \div a} f_x \cdot dx,$$

wenn nur die Summe zur Linken wirklich einen Werth hat, was vorher immer anderweitig entschieden werden muß und nicht mittelst dieser Gleichung $(\odot)$ entschieden werden kann.

Anmerkg. Da, wenn $\int f \cdot dx = \varphi_x$ gefunden worden, φ_x vieldeutig seyn kann, während f_x eindeutig ist (z. B.

*) Es werden aber z. B. die Werthe von dx allemal unendlich-klein und einander ungleich, wenn x noch eine Funktion φ_t von t ist, und die auf einander folgenden Werthe von x aus φ_t für die auf einander folgenden und um den konstant gedachten unendlich-kleinen Werth dt von einander verschiedenen Werthe von t, hervorgehen.

$\int \frac{1}{x} dx = \log x$), so folgt, daß die vorstehende Gleichung (⊙) eine unvollkommene seyn kann, so daß in den Anwendungen, von den mehreren Werthen von $\varphi_b - \varphi_a$ erst der rechte, der die bestimmte Summe zur Linken ausdrückt, noch herausgesucht werden muß (S. d. IX. Th. d. S. Kap. XI.).

§. 88.

Sind a, b, c beliebig reell (oder imaginär), so folgt (unmittelbar aus den §. 85. u. §. 87.):

1) $$\int_a^b f \cdot dx = -\int_b^a f \cdot dx,$$

weil links $dx = \frac{b-a}{n}$, rechts aber $dx = \frac{a-b}{n} = -\frac{b-a}{n}$ ist;

2) $$\int_a^c f \cdot dx = \int_a^b f \cdot dx + \int_b^c f \cdot dx,$$

weil $\varphi_c - \varphi_a = (\varphi_b - \varphi_a) + (\varphi_c - \varphi_b)$ ist.

3) Hat man $f_{-x} = f_x$, so ist allemal

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} f \cdot dx = 2\int_0^{\alpha} f \cdot dx,$$

weil die Summe zur Linken lauter Summanden hat, die paarweise (nämlich $f_{-p} \cdot dx$ und $f_{+p} \cdot dx$) einander gleich sind.

4) Ist aber $f_{-x} = -f_x$, so ist allemal

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} f \cdot dx = 0,$$

weil die Summe je zweier Summanden (die von $f_0 \cdot dx$ gleich weit abliegen) sich allemal aufhebt.

Ferner ist allemal

5) $$\int_a^b f_x \cdot dx = \int_{a-c}^{b-c} f_{x+c} \cdot dx, \text{ also auch } = \int_0^{b-a} f_{x+a} \cdot dx;$$

denn links ist $dx = \frac{b-a}{n}$ und rechts wird dx eben so; und links nimmt der erste Faktor f_x (des Produkts $f_x \cdot dx$) nach und nach die Werthe f_a, f_{a+dx}, f_{a+2dx}, rc. rc. an,

und dies ist rechts mit dem Faktor f_{x+c} gerade derselbe Fall, weil nun statt x nach und nach $a-c$, $a-c+dx$, $a-c+2\cdot dx$, etc. etc. gesetzt werden.

Auch hat man noch, wenn C nach x konstant ist:

6) $$\int_a^b C\cdot f_x\cdot dx = C\cdot\int_a^b f_x\cdot dx,$$

weil links der konstant gedachte Faktor C ein, allen einzelnen Summanden der Summe gemeinschaftlicher Faktor ist, der rechts herausgesetzt sich sieht. — Zuletzt ist noch

7) $$\int_a^b (f_x \pm F_x)\cdot dx = \int_a^b f_x\cdot dx \pm \int_a^b F_x\cdot dx,$$

weil es einerlei ist, in welcher Ordnung man addirt.

§. 89. Lehrsätze.

1) Wenn a und b reell sind, und auch φ_x und ψ_x von $x = a$ an bis $x = b$ hin reelle Werthe haben, wenn aber die Werthe von ψ_x in diesem Zwischenraume ihr Vorzeichen nicht ändern, so ist allemal

(⊙)... $$\int_a^b \varphi_x\cdot\psi_x\cdot dx = \varphi_\xi\cdot\int_a^b \psi_x\cdot dx,$$

wo ξ innerhalb der Grenzen a und b liegt, so daß man $\xi = a+\theta(b-a)$ nehmen kann, wo θ unbekannt (unbestimmt) ist, aber zwischen 0 und 1 liegt.

Denn, sind G und K die größten und kleinsten Werthe von φ_x in dem gedachten Zwischenraume, so ist für jeden der gedachten Werthe von x zwischen a und b, wenn erstens ψ_x stets positiv bleibt;

$$\varphi_x \leqq G, \quad \text{also auch} \quad \varphi_x\cdot\psi_x \leqq G\cdot\psi_x$$

und

$$\varphi_x \geqq K, \quad \text{also auch} \quad \varphi_x\cdot\psi_x \geqq K\cdot\psi_x.$$

Denkt man sich nun statt x in diesen Ungleichungen nach und nach alle Werthe gesetzt, die zwischen a und b liegen, und jede Reihe dieser Ungleichungen addirt, so folgt die Behauptung. — Analoges, wenn ψ_x stets negativ bleibt.

2) Setzt man hier, während die Voraussetzungen der N. 1. bleiben sollen, 1 statt ψ, so erhält man

I. $$\int_a^b \varphi \cdot dx = \varphi_\xi \cdot (b-a) = \varphi_{a+\theta \cdot (b-a)} \times (b-a),$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt (Vgl. §. 85.).

Setzt man (in ⊙) $(x-\gamma)\cdot\varphi_x$ statt φ_x, und $\frac{1}{x-\gamma}$ statt ψ_x, so erhält man

II. $$\int_a^b \varphi \cdot dx = (\xi-\gamma)\cdot\varphi_\xi \cdot L\frac{b-\gamma}{a-\gamma},$$

wo ξ unbestimmt ist, aber zwischen a und b liegt (so daß man $\xi = a + \theta(b-a)$ nehmen kann, wo θ zwischen 0 und 1 liegt), wenn nur die Bedingung erfüllt ist, daß die Funktion ψ_x d. h. $\frac{1}{x-\gamma}$, oder $x-\gamma$ von $x=a$ an bis zu $x=b$ hin, ihr Vorzeichen nicht ändert, d. h. also, wenn γ nicht zwischen a und b liegt.

Setzt man (in ⊙) $(x-\gamma)^\mu\cdot\varphi_x$ statt φ_x und $(x-\gamma)^{-\mu}$ statt ψ_x, so wird unter der Voraussetzung, daß $x-\gamma$ stets positiv bleibt,

III. $$\int_a^b \varphi\cdot dx = \frac{1}{1-\mu}\cdot(\xi-\gamma)^\mu\varphi_\xi\cdot\left[\frac{1}{(b-\gamma)^{\mu-1}} - \frac{1}{(a-\gamma)^{\mu-1}}\right],$$

wenn unter ξ ein (unbekannter) Werth zwischen a und b verstanden wird.

Bleibt dagegen $x-\gamma$ stets negativ, so ist

IV. $$\int_a^b \varphi\cdot dx = \frac{1}{1-\mu}(\gamma-\xi)^\mu\varphi_\xi\cdot\left[\frac{1}{(\gamma-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{(\gamma-b)^{\mu-1}}\right],$$

wobei die Potenzen stets ihre positiven Werthe vorstellen, während ξ unbekannt ist, aber zwischen a und b liegt.

Setzt man (in ⊙) $x\cdot\varphi_x$ statt φ_x, und $\frac{1}{x}$ statt ψ_x, so ergiebt sich noch

V. $$\int_a^b \varphi\cdot dx = \xi\cdot\varphi_\xi\cdot L\frac{b}{a},$$

wo ξ einen (unbekannten) Werth zwischen a und b vorstellt,

während dasmal die Grenzen a und b beide positiv oder beide negativ vorausgesetzt werden müssen, damit die Voraussetzung erfüllt ist, daß ψ_x d. h. $\frac{1}{x}$, von $x = a$ an bis $x = b$ hin sein Vorzeichen nicht ändert. (Dasselbe erhält man natürlich aus II., wenn man $\gamma = 0$ setzt.)

Setzt man endlich (in ⊙) $x^\mu \cdot \varphi_x$ statt φ_x und $x^{-\mu}$ statt ψ_x, so erhält man, wenn a und b beide positiv sind,

$$\text{VI.} \quad \int_a^b \varphi_x \cdot dx = \frac{1}{1-\mu} \xi^\mu \cdot \varphi_\xi \cdot \left[\frac{1}{b^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right],$$

wo ξ einen (unbekannten) Werth zwischen a und b vorstellt, während die Potenzen ebenfalls ihre positiven Werthe bedeuten. (Dies ist der Satz III. für $\gamma = 0$).

Aller dieser Sätze bedient man sich aber, um nöthigenfalls durch sie Grenzen zu erhalten, zwischen welchen die Werthe der bestimmten Integrale nothwendig eingeschlossen seyn müssen.

§. 90.

Ist a eine reelle Zahl und sind k_1, k_2, k_3, k_4, rc. lauter reelle und wachsende Werthe, so daß
k_1-a, k_2-k_1, k_3-k_2, k_4-k_3, in inf. endlich und positiv sind, so ist (nach §. 84. und §. 88.),

$$1) \quad \int_a^\infty f \cdot dx = \int_a^{k_1} f \cdot dx + \int_{k_1}^{k_2} f \cdot dx + \int_{k_2}^{k_3} f \cdot dx + \int_{k_3}^{k_4} f \cdot dx + \text{in inf.},$$

so oft nur alle Integrale bestimmte Werthe haben.

Ist nun die numerische Reihe zur Rechten eine convergente, so ist ihr Werth nothwendig zugleich der Werth der Summe zur Linken und wir nennen dann das bestimmte Integral

$\int_a^\infty f \cdot dx$ ein convergentes.

Ist aber die Reihe zur Rechten divergent, obgleich aus lauter endlichen, bestimmten reellen oder imaginären Gliedern bestehend, also numerisch, — so ist der Werth des Integrals zur Linken reell oder imaginär, aber unendlich-groß oder unbestimmt,

und wir nennen dann das bestimmte Integral $\int_a^\infty f\cdot dx$ ein divergentes.

Endlich kann auch der Fall eintreten, daß nicht alle Glieder der Reihe zur Rechten wirkliche endliche bestimmte (reelle oder imaginäre) Werthe haben, weil f_x für einen Zwischenwerth von x ihr Daseyn unterbricht (d. h. eine im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$, $log\,0$, rc. rc. in sich aufnimmt); dann nennen wir diese bestimmten Integrale zur Rechten, bei denen solches statt findet, und auch das bestimmte Integral $\int_a^\infty f\cdot dx$ zur Linken, unterbrochene Integrale*), und von ihnen, wie von den divergenten ist nicht weiter die Rede.

Uebrigens kann man (nach §. 88. N. 5.) die Gleichung 1.) auch so schreiben

$$2)\quad \int_a^\infty f\cdot dx = \int_a^{k_1} f\cdot dx + \int_0^{k_2-k_1} f_{x+k_1}\cdot dx + \int_0^{k_3-k_2} f_{x+k_2}\cdot dx + \text{in inf.}$$

wodurch die Reihe zur Rechten unverändert bleibt.

Wir wollen dies alles noch durch einige Beispiele erörtern.

So ist $\int_0^\infty Cos\,x\cdot dx$ divergent, weil die unendliche Reihe

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Cos\,x\cdot dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} Cos\,x\cdot dx + \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} Cos\,x\cdot dx + \text{ in inf.} =$$

$$(Sin\tfrac{1}{2}\pi - Sin\,0) + (Sin\,\pi - Sin\tfrac{1}{2}\pi) + (Sin\tfrac{3}{2}\pi - Sin\,\pi) + \text{ in inf.}$$

d. h. $= 1 - 1 + 1 -$ in inf.

divergent ist.

Das Integral $\int_0 Sin(x^2)\cdot dx$ giebt dagegen, wenn man $k_\mu = \sqrt{(\mu\pi)}$ nimmt, die unendliche Reihe

---

*) Andere Schriftsteller nennen auch diese letzteren bestimmten Integrale divergente, sowohl wenn ihre Grenzen endlich als auch wenn sie unendlich-groß sind.

$$\int_0^\infty Sin(x^2)\cdot dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} Sin(x^2)\cdot dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{(2\pi)}} Sin(x^2)\cdot dx$$
$$+\int_{\sqrt{(2\pi)}}^{\sqrt{(3\pi)}} Sin(x^2)\cdot dx + \text{in inf.},$$

in welcher Reihe die einzelnen Glieder offenbar abwechselnde Vorzeichen haben *) und dabei deshalb immer kleiner werden, weil der Unterschied der Grenzen $\sqrt{(\nu+1)\pi}-\sqrt{\nu\pi}$ desto kleiner wird, je größer man ν nimmt, ja für $\nu=\infty$ selbst unendlich-klein wird, so daß die Glieder der Reihe im Unendlichen selbst unendlich-klein werden **) (S. §. 26.).

---

*) Es ist nämlich $Sin\,z$ von $z=\mu\pi$ an bis $z=(\mu+1)\pi$ hin, entweder immerfort positiv (wenn μ gerade) oder immerfort negativ (wenn μ ungerade).

**) Setzt man hier $x^2=z$, also $x=\sqrt{z}$ und $dx=\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}}$, so ist

$$Sin(x^2)\cdot dx = \tfrac{1}{2}\frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz;$$

und da für $x=0$ auch $z=0$, und für $x=\infty$ auch $z=\infty$ wird, so hat man noch

$$1)\qquad \int_0^\infty Sin(x^2)\cdot dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz.$$

Untersucht man nun die Convergenz des Integrals zur Rechten nach unserem Kennzeichen und setzt man zu dem Ende $k_\nu=\nu\pi$, so erhält man

$$2)\quad \int_0^\infty \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz = \int_0^\pi \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz + \int_\pi^{2\pi} \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz + \text{in inf.},$$

und diese Reihe hat Glieder mit abwechselnden Vorzeichen (weil $Sin\,z$ von $z=0$ bis $z=\pi$ stets positiv, von $z=\pi$ bis $z=2\pi$ stets negativ, von $z=2\pi$ bis $z=3\pi$ wiederum stets positiv, u. s. w. f. ist), während die Nenner $\sqrt{z}$ stets wachsen, also die einzelnen Glieder der Reihe stets abnehmen; folglich ist die Reihe und mit ihr das Integral $\int_0^\infty \frac{Sin\,z}{\sqrt{z}}\cdot dz$ convergent.

Aus der Gleichung $dx=\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}}$, oder $dz=2x\cdot dx$, scheint für $z=\frac{1}{\infty}$, oder für $x=\infty$ der Widerspruch hervorzugehen, daß dx oder dz nicht stets unendlich-klein seyen, wenigstens nicht an den Grenzen, während man die Grenze 0 immer mit der Grenze $\frac{1}{\infty}$ verwechseln kann,

§. 91.

Das (numerisch-) bestimmte Integral $\int_a^\infty f\cdot dx$ ist allemal $\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$, wenn solches nicht zu den unterbrochenen gehört, sobald die unendliche Reihe

1) $f_c + f_{c+h} + f_{c+2h} + f_{c+3h} + f_{c+4h} +$ in inf.

$\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$ ist, während c beliebig reell und h beliebig positiv gedacht sind, so lange nur die Werthe von f_x, für die wachsenden Werthe von x (von einem gewissen Werthe ab) immer kleiner und zuletzt unendlich-klein werden und immer positiv (oder immer negativ) bleiben.

Beweis. Wird nämlich f_x von $x = p$ an bis $x = q$ hin, — während $q > p$, $\frac{q-p}{\nu} = dx$ und ν unendlich-groß gedacht wird, — stets positiv aber stets kleiner, so ist f_p der größeste und f_q der kleinste der Werthe von f_x, und daher ist (nach §. 85.) die Summe $\int_a^b f\cdot dx$

$$< (q-p)\cdot f_p, \quad \text{aber} \quad > (q-p)\cdot f_q.$$

Ist daher $c + \mu h = b$ ein solcher Werth von x, von welchem ab f_x stets kleiner wird und positiv bleibt, wenn x stets wächst, so ist nach dem so eben Gelehrten

$$\int_b^{b+h} f\cdot dx < f_b\cdot h \quad \text{und} \quad > f_{b+h}\cdot h,$$

$$\int_{b+h}^{b+2h} f\cdot dx < f_{b+h}\cdot h \quad \text{und} \quad > f_{b+2h}\cdot h,$$

$$\int_{b+2h}^{b+3h} f_x\cdot dx < f_{b+2h}\cdot h \quad \text{und} \quad > f_{b+3h}\cdot h,$$

u. s. w. f. in inf.

---

weil bei den bestimmten Integralen immer nur von numerischen Werthen die Rede ist. Indem man aber $dx = \frac{\infty - 0}{n}$ nimmt, kann man n immer von der Form ∞^2 sich denken, oder von der Form ∞^μ, wo $\mu > 1$ ist.

Addirt man nun alle diese Ungleichungen und nimmt man an, daß die Reihe

2) $$f_b + f_{b+h} + f_{b+2h} + f_{b+3h} + \cdots$$

convergent und ihr Werth $= s$ ist, so findet sich

$$\int_b^\infty f \cdot dx < s \cdot h \quad \text{aber} \quad > (s - f_b) \cdot h,$$

so daß also dieses (numerisch=) bestimmte Integral $\int_b^\infty f \cdot dx$ nun convergent ist, d. h. einen bestimmten endlichen Werth hat. — Da nun wegen $b = c + \mu h$ die Reihen 1.) und 2.) gleichzeitig convergent sind, und eben so die bestimmten Integrale $\int_c^\infty f \cdot dx$ und $\int_b^\infty f \cdot dx$, — in so ferne letztere beiden um das bestimmte Integral $\int_c^b f \cdot dx$ (zwischen endlichen Grenzen) von einander verschieden sind, und dieses der Voraussetzung zufolge kein unterbrochenes ist, — so ist das Behauptete erwiesen *).

So ist also das bestimmte Integral $\int_b^\infty \frac{1}{y^\mu} \cdot dy$ $\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$, je nachdem $\mu \left\{\begin{matrix} >1 \\ \text{nicht} >1\end{matrix}\right\}$ ist, weil die unendliche Reihe

$$\frac{1}{b^\mu} + \frac{1}{(b+h)^\mu} + \frac{1}{(b+2h)^\mu} + \text{in inf.}$$

oder (für $b = h = 1$)

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \text{in inf}$$

$\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem $\mu \left\{\begin{matrix} >1 \\ \text{nicht} >1\end{matrix}\right\}$ ist (nach §. 27. N. 2.).

---

*) Im §. 27. N. 2. wurde die Convergenz einer unendlichen Reihe, von dem endlichen Werthe eines allgemein-bestimmten Integrals $\int_{\infty \div 0} \psi \cdot dx$ abhängig gemacht. — Hier ist die Convergenz eines numerisch-bestimmten Integrals von der Convergenz einer unendlichen Reihe abhängig.

§. 92.

Liegt c zwischen den reellen Werthen a und b, und ist

$$f_x = \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu},$$

während ψ_x für alle Werthe von x, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin, bestimmte Werthe annimmt, — so gehört das bestimmte Integral

$$\int_a^b \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx$$

nur dann erst zu den unterbrochenen (die keinen Werth haben), wenn $\mu \geqq 1$ ist; dagegen hat dasselbe bestimmte Integral jedesmal noch einen bestimmten Werth, so oft $\mu < 1$ ist, obgleich die Funktion f_x für einen Werth c von x, der zwischen a und b liegt, ihr Daseyn unterbricht; nur muß man $(x-c)^\mu$ stets als einwerthig (eindeutig) sich denken und wir wollen hier jedesmal den einfachsten Werth dieser Potenz darunter verstehen (S. Einleitg. §. 6.).

Beweis. 1) Denn, ist f_x die Ordinate PM, und $x = OP$ die Abscisse einer Kurve, so ist $f_x \cdot dx$ der Inhalt des an PM dicht anliegenden Streifens von der Breite dx und Höhe f_x, so lange f_x positiv ist; und $\int_p^q f \cdot dx$ ist dann die Summe aller Streifen, die zwischen den zu den Abscissen $x = p$ und $x = q$ gehörigen Ordinaten liegen, d. h. der Inhalt einer von diesen Ordinaten, von der Abscissen-Axe und von der Kurve begrenzten Fläche, wenn nur f_x von $x = p$ an bis zu $x = q$ hin stets positiv ist.

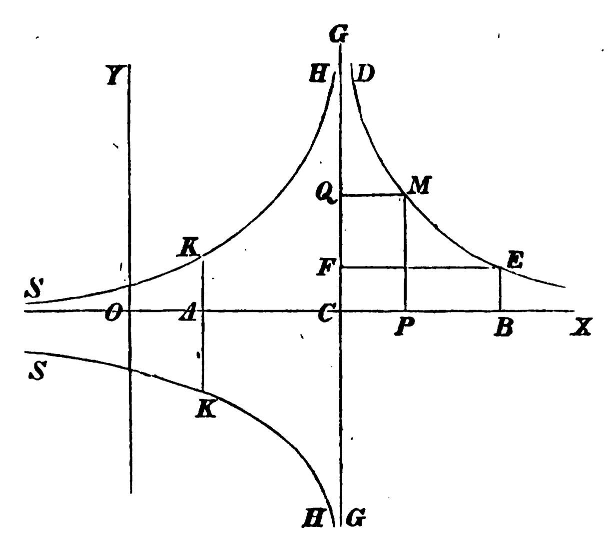
2) Denkt man sich nun OX und OY senkrecht auf einander als Koordinaten-Axen und $OA = a$, $OC = c$ und $OB = b$; denkt man sich ferner

$$y = \frac{1}{(x-c)^{\frac{m}{n}}}$$

als die zur Abscisse x gehörige Ordinate y, so wird die Gleichung

$$y = \frac{1}{(x-c)^{\frac{m}{n}}}$$

eine Kurve vorstellen, deren einer Zweig DME die



auf OX senkrechte CG zur Assymptote haben wird (welcher die Kurve ohne Ende sich nähert, ohne je mit ihr zusammenfallen zu können). Ferner ist nun

$$\int_c^b \frac{1}{(x-c)^{\frac{m}{n}}} \cdot dx$$

der Inhalt der Figur DMEBCG, welche zwischen der Assymptote CG und der Kurve bis ins Unendliche hin sich erstreckt; und es entsteht nun die Frage, ob dieser Inhalt ein endlicher oder unendlich-groß ist. Um dies zu untersuchen, ziehe man EF parallel mit BC, während $BE = \frac{1}{(b-c)^{\frac{m}{n}}} = \beta$ bekannt

ist und untersuche, ob der Inhalt DMEFG ein endlicher oder unendlich-groß ist. Setzt man aber für einen beliebigen Punkt M der Kurve, für welchen $OP = x$, $PM = CQ = y$ ist, $QM = z$, so hat man $z = x - c$, also $y = \frac{1}{z^{\frac{m}{n}}}$, folglich

$z = \frac{1}{y^{\frac{n}{m}}}$ und noch

$$\text{Inhalt DMEFG} = \int_{\beta}^{\infty} z \cdot dy = \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{n}{m}}} \cdot dy;$$

und da dieses Integral $\begin{Bmatrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{Bmatrix}$ bestimmten Werth hat, je nachdem $\frac{n}{m} \begin{Bmatrix} >1 \\ \text{nicht} >1\end{Bmatrix}$ ist, so folgt, daß der Inhalt DMEFG, also auch der Inhalt DMEBCG d. h. das bestimmte Integral

$$\int_c^b \frac{1}{(x-c)^{\frac{m}{n}}} \cdot dx \quad \begin{Bmatrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{Bmatrix} \text{ bestimmten Werth}$$

hat, je nachdem $\frac{n}{m} \begin{Bmatrix} >1 \\ \text{nicht} >1\end{Bmatrix}$, also $\frac{m}{n} \begin{Bmatrix} <1 \\ \text{nicht} <1\end{Bmatrix}$ ist.

3) Setzen wir nun zunächst voraus, daß ψ_x von $x = c$ an bis zu $x = b$ hin stets reell bleibe, so ist (nach §. 89. N. 1.), eben weil $(x-c)^{\mu}$ innerhalb der Grenzwerthe von x stets positiv bleibt,

$$\int_c^b \frac{\psi_x}{(x-c)^{\mu}} \cdot dx = \psi_{\xi} \cdot \int_c^b \frac{1}{(x-c)^{\mu}} \cdot dx$$

wo ξ zwischen c und b liegt, so daß ψ_{ξ} einen bestimmten endlichen Werth hat. Also hat $\int_c^b \frac{\psi_x}{(x-c)^{\mu}} \cdot dx$ $\begin{Bmatrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{Bmatrix}$ bestimmten endlichen Werth, sobald der andere Faktor

$\int_c^b \frac{1}{(x-c)^{\mu}} \cdot dx$ $\begin{Bmatrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{Bmatrix}$ solchen Werth hat, d. h. wenn $\mu \begin{Bmatrix} <1 \\ \text{nicht} <1\end{Bmatrix}$ ist.

4) Das bestimmte Integral $\int_a^c \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx$ läßt sich (nach §. 88. N. 6.) umschreiben in $\frac{1}{(-1)^\mu} \cdot \int_a^c \frac{\psi_x}{(c-x)^\mu} \cdot dx$. Da nun $\frac{1}{(c-x)^\mu}$ stets positiv bleibt, und da deshalb auf dieselbe Weise wie in 2) bewiesen werden kann, daß auch $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^\mu} \cdot dx$ $\left\{\begin{matrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{matrix}\right\}$ bestimmten endlichen Werth hat, je nachdem $\mu \left\{\begin{matrix}<1\\ \text{nicht} <1\end{matrix}\right\}$ ist, so kann auch wieder wie in 3) gefolgert werden, daß auch $\int_a^c \frac{\psi_x}{(c-x)^\mu} \cdot dx$ und dann auch $\int_a^c \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx$ $\left\{\begin{matrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{matrix}\right\}$ bestimmten Werth hat, je nachdem $\mu \left\{\begin{matrix}<1\\ \text{nicht} <1\end{matrix}\right\}$ ist.

5) Und weil nun

$$\int_a^b \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx = \int_a^c \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx + \int_c^b \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx$$

ist, so hat auch das Integral zur Linken $\left\{\begin{matrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{matrix}\right\}$ bestimmten endlichen Werth, je nachdem $\mu \left\{\begin{matrix}<1\\ \text{nicht} <1\end{matrix}\right\}$ ist, so lange nur ψ_x von $x = a$ bis $x = b$ reell und endlich bleibt.

6) Ist endlich ψ_x von $x = a$ an bis $x = b$ hin von der Form $P + Q \cdot i$, wo P und Q continuirliche oder discontinuirliche Werthe seyn können (S. die Note zu §. 85.), so ist doch immer dann

$$\int_a^b \frac{\psi_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx = \int_a^b \frac{P_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx + i \cdot \int_a^b \frac{Q_x}{(x-c)^\mu} \cdot dx,$$

weil i als ein gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder herausgerückt werden kann, und so hat also unser bestimmtes Integral

auch jetzt noch $\begin{Bmatrix}\text{einen}\\ \text{keinen}\end{Bmatrix}$ bestimmten Werth, je nachdem $\mu\begin{Bmatrix}<1\\ \text{nicht} <1\end{Bmatrix}$ ist, wenn auch die Funktionen P_x und Q_x an gewissen Stellen ihre Form verändern sollten.

Anmerkg. Ganz auf dieselbe Weise beweist man aber, daß $\int_a^b log(x-c)\cdot dx$ und $\int_a^b \psi_x \cdot log(x-c)\cdot dx$ noch nicht zu den unterbrochenen Integralen gehören (die keinen Werth haben), obgleich die Funktion $f_x = log(x-c)$ oder $f_x = \psi_x \cdot log(x-c)$ für $x = c$, welcher Werth zwischen den reellen Werthen a und b gedacht wird, ihr Daseyn unterbricht. — Man muß nur statt $log(x-c)$ lieber $-log\frac{1}{x-c}$ schreiben und dann eine Kurve sich denken, gegeben durch die Gleichung $y = log\frac{1}{x-c}$, welche zu $x-c = e^{-y}$ oder $z = e^{-y}$ führt, während $\int_\beta^\infty e^{-y}\cdot dy$ deshalb convergent ist, weil die unendliche Reihe

$$e^{-c}+e^{-(c+h)}+e^{-(c+2h)}+\ldots$$

für jeden positiven Werth von h zu den convergenten Reihen gehört *).

§. 93.

Die Sätze des §. 92. und Anmerkg. sind besondere Fälle des folgenden allgemeineren Satzes:

Unterbricht eine Funktion f_x für $x = c$, welcher Werth zwischen den reellen Werthen a und b liegt, ihr Daseyn (d. h.

*) Daraus, daß $\int e^{-y}\cdot dy = -e^{-y}$, folglich $\int_{\infty \div \beta} e^{-y}\cdot dy = e^{-\beta}$, also endlich ist, kann man bekanntlich nicht so ohne Weiteres folgern, daß $\int_\beta^\infty e^{-y}\cdot dy$ ein convergentes Integral sey d. h. einen bestimmten endlichen Werth habe.

nimmt sie für $x = c$ eine im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$, $log 0$, 2c. 2c. in sich auf), so gehört das bestimmte Integral $\int_a^b f \cdot dx$ doch noch nicht zu den unterbrochenen (die keinen Werth haben), so lange noch $f_{c \pm p \cdot dx} \cdot dx$ unendlich-klein ist, während p beliebig aber endlich gedacht wird. In diesem Falle hat das Integral noch einen bestimmten endlichen Werth. Ist aber $f_{c \pm p \cdot dx} \cdot dx$ endlich oder gar unendlich-groß, so gehört das Integral $\int_a^b f \cdot dx$ zu den unterbrochenen, d. h. es hat dann gar keinen Werth.

Beweis. Denkt man sich ε beliebig klein, äußerst klein aber bestimmt, also noch nicht unendlich-klein, so läßt sich doch $\int_a^b f \cdot dx$ zerlegen in die Summe

$\int_a^{c-\varepsilon} f \cdot dx + \int_{c-\varepsilon}^{c} f \cdot dx + \int_c^{c+\varepsilon} f \cdot dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f \cdot dx$, wobei man sich ε negativ denken kann, wenn $a > c > b$ seyn sollte. Da wir voraussetzen, daß f_x für keinen anderen Werth von x, der zwischen a und b liegt, ihr Daseyn unterbricht, so hat das erste und das vierte dieser letztern vier bestimmten Integrale offenbar, jedes für sich, seinen bestimmten Werth; es handelt sich daher nur noch um die bestimmten Integrale

$$\int_{c-\varepsilon}^{c} f \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_c^{c+\varepsilon} f \cdot dx.$$

Denken wir uns nun ε so klein, daß von $x = c - \varepsilon$ an bis zu $x = c - dx$ hin das Produkt $f_x \cdot dx$ immer fort endlich, oder immerfort unendlich-groß bleibt, so ist jedes der beiden letztern bestimmten Integrale (weil dx in ε noch immer unendlich oft steckt) die Summe von unendlich-vielen endlichen oder unendlich-großen Werthen, folglich selbst unendlich-groß oder (bei verschiedenen Vorzeichen) unbestimmt. Ist aber $f_{c \pm p \cdot dx} \cdot dx$ noch unendlich-klein, so ist das bestimmte Integral

$\int_c^{c+\varepsilon} f \cdot dx = f_{c+\vartheta \cdot \varepsilon} \cdot \varepsilon$ (nach §. 89. N. 2. I.), wo ϑ zwischen

0 und 1 liegt, wenn auch unbestimmt ist. Weil aber dieser Ausdruck $f_{c+\theta\cdot\varepsilon}\cdot\varepsilon$ für $\varepsilon = dx$ unendlich-klein wird und für die von dx an wachsenden Werthe von ε stetig nur sich ändert, so kann derselbe Ausdruck für ein beliebig klein aber bestimmt gedachtes ε, nicht unendlich-groß seyn (denn er muß von der Form $P\cdot\varepsilon^m$ gedacht werden, während m positiv ist, und P stets endlich bleibt).

Dasselbe gilt offenbar auch von dem andern Integral $\int_{c-\varepsilon}^{c} f\cdot dx$.

Also hat $\int_a^b f\cdot dx$ unter der gemachten Voraussetzung (als die Summe von vier bestimmten Werthen) selbst noch einen bestimmten Werth *).

Anmerkg. Wir müssen aber noch einmal darauf aufmerksam machen, daß $\int_{b\div a} f\cdot dx$ einen bestimmten Werth haben kann, während $\int_a^b f\cdot dx$ keinen hat.

So hat z. B. $\int_{-1}^{+2} \frac{1}{x^3}\cdot dx$ (nach §. 92.) keinen bestimmten Werth, eben weil hier $a = -1$, $b = +2$, $f_x = \frac{1}{x^3}$, und für $x = c = 0$, $f_{x\pm p\cdot dx}\cdot dx$ in $\frac{dx}{\pm p^3\cdot dx^3}$ übergeht und dieses Produkt nun nicht mehr unendlich-klein ist. Dagegen

---

*) Sollte $c = a$ oder $c = b$ seyn, so würde natürlich alles dasselbe bleiben, nur daß dann $\int_a^b f\cdot dx$ nicht in vier, sondern entweder in die beiden letztern, oder in die beiden erstern dieser vier Integrale zerlegt gedacht würde.

Uebrigens haben wir absichtlich hier den besonderen Fall dieses §. 93., wie solcher im §. 92. steht, noch besonders bewiesen, weil der Beweis des §. 92. (so wie der Beweis des anderen besonderen Falles in der Anmerk. zu § 92.) viel anschaulicher ist und in das wahre Wesen dieses Satzes tiefer einblicken läßt.

findet sich $\varphi_x = \int f \cdot dx = \int \frac{1}{x^3} \cdot dx = -\frac{1}{4} x^4$; also

$\int_{b \div a} f \cdot dx = \varphi_b - \varphi_a = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4}(-1)^4 = -\frac{17}{4}$.

§. 94.

Wir wollen nun das Wichtigste über die Existenz der (numerisch-) bestimmten Integrale in diesem Paragraphen zusammenfassen, also theilweise rekapituliren:

A. Gehört ein bestimmtes Integral $\int_a^b f \cdot dx$ nicht zu den divergenten und auch nicht zu den unterbrochenen, so hat es jedesmal einen bestimmten Werth und solcher ist dann allemal $= \int_{b \div a} f \cdot dx$ (S. §§. 86. 87.).

Hat aber das letztere allgemein-bestimmte Integral $\int_{b \div a} f \cdot dx$ einen bestimmten (reellen oder imaginären) Werth, so kann man daraus nicht folgern, daß $\int_a^b f \cdot dx$ kein unterbrochenes sey und ebenfalls diesen Werth haben müsse, sondern die Untersuchungen über das Nichtunterbrochenseyn und über die Convergenz eines bestimmten Integrals $\int_a^b f \cdot dx$ müssen allemal der Auswerthung (Ausrechnung) desselben vorausgehen.

B. Ueber die Convergenz oder Divergenz der bestimmten Integrale ist aber überhaupt Folgendes zu merken:

1) Das bestimmte Integral $\int_a^\infty f \cdot dx$ (wenn es kein unterbrochenes ist) ist allemal divergent, so oft f_x für $x = +\infty$ nicht unendlich-klein wird.

Das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^b f \cdot dx$ ist (wenn es kein unterbrochenes ist) allemal divergent, so oft f_x für $x = -\infty$ nicht unendlich-klein ist.

Das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^\infty f \cdot dx$ ist dagegen divergent, wenn eines der beiden bestimmten Integrale $\int_{-\infty}^b f \cdot dx$ oder

$\int_a^\infty f \cdot dx$ divergent ist, und keines der letztern zu den unterbrochenen gehört; während a und b beliebig reell gedacht sind.

2) Umgekehrt: ist f_∞, oder $f_{-\infty}$, oder sind beide Werthe unendlich-klein, so sind deshalb die bestimmten Integrale $\int_{-\infty}^b f_x \cdot dx$, $\int_a^{+\infty} f_x \cdot dx$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx$ noch nicht nothwendig convergent, sondern sie können noch immer divergent seyn, d. h. gar keinen (oder, wie man oft sagt, einen unendlich-großen) Werth haben.

3) Dagegen hat das Integral $\int_a^\infty f_x \cdot dx$, wenn es kein unterbrochenes ist, allemal einen bestimmten Werth, d. h. es ist convergent, so oft von $x = +c$ an bis zu $x = +\infty$ hin das Produkt $x^\mu \cdot f_x$ beliebig klein ist und zuletzt unendlich-klein wird, während c beliebig groß und μ um noch so wenig aber um etwas endliches größer als 1 vorausgesetzt ist.

Denn es zerlegt sich die Summe $\int_a^\infty f \cdot dx$ in die Theil-Summen $\int_a^c f \cdot dx + \int_c^\infty f \cdot dx$. Ist nun c noch so groß aber endlich, so hat $\int_a^c f_x \cdot dx$, der Voraussetzung zufolge, einen bestimmten endlichen Werth. Ferner ist der andere Theil $\int_c^\infty f_x \cdot dx = \frac{1}{1-\mu} \xi^\mu \cdot f_\xi \cdot \left[\frac{1}{\infty^{\mu-1}} - \frac{1}{c^{\mu-1}}\right]$ (nach §. 88. N. 2.), wo ξ ein Werth zwischen c und ∞ ist. Denkt man sich nun c so groß, daß $\xi^\mu \cdot f_\xi$ bereits beliebig klein wird, so ist, weil $\mu > 1$ ist, also $\frac{1}{\infty^{\mu-1}} = \frac{1}{\infty}$ und $\frac{1}{(1-\mu) \cdot c^{\mu-1}}$ beliebig klein wird, das Integral $\int_a^\infty f_x \cdot dx$ von dem Integrale $\int_a^c f_x \cdot dx$ um beliebig wenig verschieden.

Eben so hat das Integral $\int_{-\infty}^b f_x \cdot dx$, wenn es kein unterbrochenes ist, allemal einen bestimmten Werth, d. h. es ist convergent, so oft von $x = \infty$ an bis zu $x = -c$ hin, das Produkt $x^\mu \cdot f_x$ anfangs unendlich-klein und dann beliebig klein wird, während c beliebig groß gedacht und μ um noch so wenig, aber um etwas endliches größer als 1 ist.

Ferner ist das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot dx$ allemal convergent, so oft jedes der beiden bestimmten Integrale $\int_a^{\infty} f \cdot dx$ und $\int_{-\infty}^{b} f \cdot dx$ für sich, zu den convergenten gehört *). — Dagegen ist das erstere bestimmte Integral allemal divergent, so oft eines der beiden letzteren zu den divergenten gezählt werden muß; — vorausgesetzt immer, daß keines dieser Integrale zu den unterbrochenen gehört und a und b stets reell gedacht werden.

4) Das bestimmte Integral $\int_a^{\infty} f_x \cdot dx$, wo a beliebig reell gedacht wird, ist natürlich mit dem bestimmten Integral $\int_0^{\infty} f_x \cdot dx$ gleichzeitig convergent, oder gleichzeitig divergent, vorausgesetzt, daß keines ein unterbrochenes ist.

Eben so sind $\int_{-\infty}^{b} f_x \cdot dx$ und $\int_{-\infty}^{0} f_x \cdot dx$ gleichzeitig convergent, oder gleichzeitig divergent, wenn keines ein unterbrochenes ist, während b beliebig reell gedacht wird.

5) Das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} f_x \cdot dx$ ist allemal convergent (so oft es nicht zu den unterbrochenen gehört), wenn f_∞ unendlich-klein wird, und wenn zu gleicher Zeit die unendliche Reihe

$$(\odot)\cdots \quad \int_0^{k_1} f_x \cdot dx + \int_{k_1}^{k_2} f_x \cdot dx + \int_{k_2}^{k_3} f_x \cdot dx + \cdots \text{ in inf.},$$

*) Daraus folgt z. B. sogleich, daß wenn $\frac{f_x}{F_x}$ eine rationale gebrochene Funktion von x ist, deren Zähler f_x um wenigstens 2 Grade niedriger ist als der Nenner F_x, und wenn $F_x = 0$ lauter imaginäre Wurzelwerthe hat (damit $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_x}{F_x} \cdot dx$ nicht zu den unterbrochenen Integralen gehört) — daher auch vom geraden Grade ist, — dieses letztere bestimmte Integral dann allemal konvergire, d. h. einen bestimmten Werth habe.

wo k_1, k_2, k_3, k_4, ꝛc. der Größe nach zwischen a und ∞ auf einander folgen, — oder wenn die unendliche Reihe

(☾)... $f_c + f_{c+h} + f_{c+2h} + f_{c+3h} + \cdots$ in inf.,

in welcher c beliebig reell gedacht ist, h aber beliebig positiv, — zu den convergenten numerischen Reihen gehört (S. §. 91.).

6) Dagegen ist $\int_a^\infty f_x \cdot dx$, vorausgesetzt, daß es kein unterbrochenes ist, unendlich-groß und hat daher dann keinen bestimmten, einer weiteren Rechnung noch unterworfenen Werth d. h. es ist divergent, (einmal wenn f_x nicht unendlich-klein wird für $x = \infty$, — und dann aber auch) wenn f_x unendlich-klein werden sollte für $x = \infty$, sobald nur eine der Reihen (⊙) oder (☾) als divergent erkannt wird (S. §. 91.).

7) Die Summe (das bestimmte Integral) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx$ hat endlich {entweder einen / oder keinen} bestimmten Werth, je nachdem {entweder beide / oder nicht alle beide} bestimmte Integrale $\int_0^\infty f_x \cdot dx$ und $\int_0^\infty f_{-x} \cdot dx$ einen bestimmten Werth haben.

Anmerkg. Wie wichtig es ist, allemal vorher zu untersuchen, ob die Summe $\int_a^b f_x \cdot dx$ auch wirklich einen bestimmten Werth habe, ehe man denselben zu bestimmen sucht, kann man an beliebig vielen Beispielen nachweisen. Aus

$\int \frac{1}{(1-2x)^2} \cdot dx = \frac{1}{2(1-2x)}$ z. B. würde (nach §. 86.) folgern:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-2x)^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{2(1-2x)}\right]_{1 \div 0} = -1,$$

wenn man ohne Weiteres voraussetzen wollte, daß dieses bestimmte Integral wirklich einen Werth habe. Weil aber andrerseits das Differenzial $\frac{1}{(1-2x)^2} \cdot dx$ für alle Werthe von x, die zwischen 0 und 1 liegen, offenbar nie negativ wird, so

kann die Summe aller dieser Werthe doch ebenfalls nicht $= -1$ seyn. — Allein es geht die Differenzial-Funktion $\frac{1}{(1-2x)^2} \cdot dx$ für $x = \frac{1}{2}$ (also innerhalb der Grenzen 0 und 1) in die Form $\frac{1}{0}$ über; sie unterbricht also für $x = \frac{1}{2}$ ihr Daseyn und dies auf eine Weise, daß das Integral zu den unterbrochenen gehört. Darum hat dieses bestimmte Integral gar keinen Werth und solcher, der gar nicht ist, kann daher nun auch nicht mehr durch das allgemein-bestimmte Integral $\int_{1 \div 0} \frac{1}{(1-2x)^2} dx$, welches letztere den Werth -1 hat, ausgedrückt werden.

§. 95.

Wir stellen nun von den (numerisch-) bestimmten Integralen noch folgende Wahrheiten auf:

1) $\quad \partial\left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z} \cdot dx\right)_z = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \partial f_z \cdot dx$ *),

wenn nur $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ nach z konstant sind; — weil eine Summe differenzirt wird, wenn man (wie zur Rechten geschehen) jeden einzelnen Summanden differenziirt.

Sind dagegen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ noch Funktionen von z, so wird

2) $\quad \partial\left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z} \cdot dx\right)_{(z)} = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \partial f_z \cdot dx + f_{\mathfrak{X},z} \cdot \partial \mathfrak{X}_z - f_{\mathfrak{x},z} \cdot \partial \mathfrak{x}_z$,

wo die Klammern um (z) andeuten, daß (links) nach allem z differenziirt werden soll; — und in dieser Formel steckt wiederum die N. 1. als ein besonderer Fall, weil $\partial \mathfrak{X}_z$ oder $\partial \mathfrak{x}_z$, $= 0$ wird, so oft $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{x}$, nach z konstant ist.

Ist nämlich $\int f_{x,z} \cdot dx = \varphi_{x,z}$, so hat man $\partial \varphi_x = f_{x,z}$, also $\partial \varphi_{\mathfrak{X}} = f_{\mathfrak{X},z}$ und $\partial \varphi_{\mathfrak{x}} = f_{\mathfrak{x},z}$, und dabei

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z} \cdot dx = \varphi_{\mathfrak{X},z} - \varphi_{\mathfrak{x},z}.$$

*) Dies nennt Leibnitz die differentiatio de curva in curvam.

Differenzirt man nun diese Gleichung links und rechts nach allem z, so erhält man zur Rechten, indem man zuerst nach dem explicit enthaltenen z differenziirt, also $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ als nach z konstant ansieht, dasselbe wie wenn man zur Linken unter derselben Voraussetzung differenziirt, also (nach N. 1.) $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \partial f_z \cdot dx$, — dann aber muß man rechts auch noch nach dem z differenziiren, welches in $\mathfrak{X}$ und in $\mathfrak{x}$ steckt und dies letztere giebt noch

$$\partial\varphi_{\mathfrak{X}} \cdot \partial\mathfrak{X}_z - \partial\varphi_{\mathfrak{x}} \cdot \partial\mathfrak{x}_z \quad \text{d. h.} \quad f_{\mathfrak{X},z} \cdot \partial\mathfrak{X}_z - f_{\mathfrak{x},z} \cdot \partial\mathfrak{x}_z.$$

Ferner ist

$$3) \qquad \int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{Z}} \left(\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f_{x,z} \cdot dx \right) \cdot dz = \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{Z}} f_{x,z} \cdot dz \right) \cdot dx,$$

wenn nur $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{Z}$ nach x konstant sind und wiederum $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ nach z konstant vorausgesetzt werden; — weil es einerlei ist, in welcher Ordnung die unendlichmal unendlich-vielen Summanden addirt werden.

Anmerkg. Wenn alle diese Sätze von den (numerisch-) bestimmten Integralen, wie sich von selbst versteht, nur dann gelten, wenn keines derselben ein divergentes und auch keines ein unterbrochenes ist, und wenn dies namentlich noch von der nächstvorhergehenden Gleichung 3) gilt, — so findet dagegen der analoge Lehrsatz für allgemein-bestimmte Integrale, nämlich

$$\int_{\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}} \left(\int_{\mathfrak{X}+\mathfrak{x}} f \cdot dx \right) \cdot dz = \int_{\mathfrak{X}+\mathfrak{x}} \left(\int_{\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}} f \cdot dz \right) \cdot dx$$

allemal ganz unbedingt statt und namentlich dann auch noch, wenn die entsprechenden (numerisch-) bestimmten Integrale zu den unterbrochenen gehören, z. B. wenn

$$f = \frac{z^2 - x^2}{(z^2 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = +1,$$

so wie $\mathfrak{x} = \mathfrak{z} = -1$ genommen wird; — und wenn andere Schriftsteller für dieses Beispiel links und rechts nicht einerlei gefunden haben, so liegt dies daran, daß sie von dem vieldeutigen Ausdruck, der sich links und rechts ergiebt, links einen, rechts einen andern seiner Werthe gesetzt haben (S. „Geist d. Diff. u. Int. Rechn." Erlangen 1846. §. 18. Anmerkg. 1.)

§. 96.

Hat man

$$\int f\cdot dx = \varphi_x + \int F\cdot dx \quad \text{d. h.} \quad \int f\cdot dx = \int(\partial\varphi_x + F_x)\cdot dx$$

gefunden, so ist auch (unmittelbar aus §. 88. N. 6.)

1) $$\int_a^b f\cdot dx = \varphi_b - \varphi_a + \int_a^b F\cdot dx.$$

Daher ist auch

2) $$\int_a^b(\varphi\cdot\psi)\cdot dx = \varphi_b\cdot\int_g^b\psi\cdot dx - \varphi_a\cdot\int_g^a\psi\cdot dx$$
$$-\int_a^b(\partial\varphi_x\cdot\int_g^x\psi\cdot dx)\cdot dx,$$

weil $\int(\varphi\cdot\psi)\cdot dx = \varphi\cdot\int\psi\cdot dx - \int(\partial\varphi_x\cdot\int\psi\cdot dx)\cdot dx$ ist, wenn rechts unter $\int\psi\cdot dx$ ein und dasselbe (etwa mit $x = g$ anfangende) Integral verstanden wird, so daß $\int_g^x\psi\cdot dx$ statt $\int\psi\cdot dx$ geschrieben werden kann, wo g ein beliebiger konstanter Werth ist.

§. 97.

Ist dagegen x eine Funktion von z und sind $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$ die reellen Werthe von z, welche bezüglich den reellen Werthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ von x zugehören, so ist

1) $$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f\cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{Z}}(f\cdot\partial x_z)\cdot dz$$

allemal dann und **nur dann**, wenn, während die Werthe von x zwischen ihren Grenzen als stets $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{abnehmend}\end{matrix}\right\}$ gedacht werden, die, aus der vorausgesetzten Gleichung zwischen x und z zu diesen Werthen von x gehörigen Werthe von z, nach der Ordnung ebenfalls entweder stets $\left\{\begin{matrix}\text{wachsen}\\ \text{abnehmen}\end{matrix}\right\}$ oder stets $\left\{\begin{matrix}\text{abnehmen}\\ \text{wachsen}\end{matrix}\right\}$, d. h. also, wenn keiner der zugehörigen Werthe

von z (innerhalb der Grenzwerthe von x) ein Maximum oder ein Minimum wird.

Denn da $dx = \partial x_z \cdot dz$ ist, so sind die einzelnen Summanden der Summen in 1.) (unter der gemachten Voraussetzung) dieselben und auch der Umfang der Summen derselbe *).

---

*) Sollten aber Beispielsweise die Werthe von x, von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{X}$ hin stets wachsen, und die zugehörigen Werthe von z, von $z = \mathfrak{z}$ an bis zu $z = \mathfrak{z}'$ hin (welcher Werth $\mathfrak{z}'$ zu $x = \mathfrak{x}' < \mathfrak{X}$ gehört) stets abnehmen, um dann wieder durch $\mathfrak{z}$ hindurch (während dieser zweite Werth $\mathfrak{z}$ dem Werthe $x = \mathfrak{x}''$ angehört und $\mathfrak{x}'' > \mathfrak{x}' > \mathfrak{x}$ aber $< \mathfrak{X}$ ist) bis zu $\mathfrak{Z}$ hin zu wachsen, indem $\mathfrak{Z} > \mathfrak{z}$ vorausgesetzt seyn mag, — so würde nach der im §. 84. eingeführten Bezeichnung unter $\int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{Z}} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz$ nur der letztere Theil der Summe verstanden werden können, welcher der Summe $\int_{\mathfrak{x}''}^{\mathfrak{X}} f \cdot dx$, aber nicht mehr der ganzen Summe $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f \cdot dx$ gleich seyn würde, in so ferne letztere noch um $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}''} f \cdot dx$ größer ist.

Man konnte hier leicht getäuscht und zu irrigen Folgerungen, nämlich zu dem Glauben geführt werden, daß in dem angeführten Beispiele

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}''} f \cdot dx = 0$$

seyn müsse, wenn man etwa folgende Betrachtungen anstellte.

Es ist nämlich unbedingt allemal (nach N. 1. und §. 87. ⊙)

$$1) \qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}'} f \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}'} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz = \int_{\mathfrak{z}' \div \mathfrak{z}} f \cdot \partial x_z \cdot dz$$

und

$$2) \qquad \int_{\mathfrak{x}'}^{\mathfrak{x}''} f \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}'}^{\mathfrak{z}} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz = \int_{\mathfrak{z} \div \mathfrak{z}'} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz.$$

Addirt man daher diese Gleichungen, so folgt (nach §. 88. N. 2.)

$$3) \qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}''} f \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}' \div \mathfrak{z}} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz + \int_{\mathfrak{z} \div \mathfrak{z}'} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz$$

und da diese Summe zur Rechten von der Form $(\varphi_{\mathfrak{z}'} - \varphi_{\mathfrak{z}}) + (\varphi_{\mathfrak{z}} - \varphi_{\mathfrak{z}'})$ ist, so scheint ihr Werth $= 0$ zu seyn, und dann wäre (in diesem Beispiele) auch $\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}''} f \cdot dx = 0.$

Aus diesem Satze N. 1. geht übrigens der Satz §. 88. N. 5. ohne Weiteres hervor, wenn man $x-c=z$ setzt, so daß $\partial x_z = 1$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}-c$, so wie $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}-c$ wird, nur daß dort bezüglich a und b statt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ stehen.

Aber eben weil die Einschränkung auch erfüllt ist, so oft man $x = \frac{z}{b}$, oder $x = bz$, oder $x = b-z$ genommen wird, so ergeben sich aus der N. 1. sogleich noch folgende Gleichungen, nämlich:

Weil aber der Voraussetzung zufolge z Anfangs, von $z = \mathfrak{z}$ an bis zu $z = \mathfrak{z}'$ hin immerfort abnimmt, während x von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = \mathfrak{x}'$ hin wächst, so ist in diesem ganzen Raume, ∂x_z negativ, während in dem darauf folgenden Raume, nämlich von $z = \mathfrak{z}'$ an bis z zum zweiten Male $= \mathfrak{z}$ wird, die Werthe von z mit denen von x zugleich wachsen, folglich, da jedesmal $dx = \partial x_z \cdot dz$ ist, nun für dieselben Werthe von z, für welche vorher ∂x_z nothwendig stets negativ gewesen ist, jetzt nothwendig stets positiv seyn muß. In den beiden Summanden zur Rechten in 3.) ist daher ∂x_z doppeldeutig, und stellt in dem einen Summanden seinen negativen, in dem andern für denselben Werth von z, seinen positiven Werth vor (und diese beiden Werthe brauchen auch in ihren absoluten Gliedern nicht einander gleich zu seyn). Setzen wir daher $\int(f \cdot \partial x_z) \cdot dz = \varphi_z$, so ist auch φ_z mindestens zweiförmig (zwei-deutig) und stellt in der einen Differenz $\varphi_{\mathfrak{z}'} - \varphi_{\mathfrak{z}}$ eine seiner Formen, in der anderen Differenz $\varphi_{\mathfrak{z}} - \varphi_{\mathfrak{z}'}$ eine andere seiner Formen vor, so daß deshalb auch die Summe dieser beiden Differenzen nicht Null seyn muß, eben weil schon $\varphi_{\mathfrak{z}} - \varphi_{\mathfrak{z}}$ nicht Null ist, obgleich hier Minuend und Subtrahend einander gleich zu seyn scheinen (S. d. „Geist der Diff. u. Int. Rechnung. Erlangen 1846).

Während aber (dem Texte nach) die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{X}} f \cdot dx = \int_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{Z}} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz$$

nur unter der gemachten Einschränkung gilt, bleibt der, im IV. Th. d. „Systems d. Math." bewiesene Lehrsatz

$$\int_{\mathfrak{X} \div \mathfrak{x}} f \cdot dx = \int_{\mathfrak{Z} \div \mathfrak{z}} (f \cdot \partial x_z) \cdot dz$$

ohne diese Einschränkung wahr.

2) $\int_{\alpha}^{\beta} f_x \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot \int_{b\alpha}^{b\beta} f_{z:b} \cdot dz$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} f_x \cdot dx = b \cdot \int_{\alpha:b}^{\beta:b} f_{bz} \cdot dz$

4) $\int_{\alpha}^{\beta} f_x \cdot dx = -\int_{b-\alpha}^{b-\beta} f_{b-z} \cdot dz = \int_{b-\beta}^{b-\alpha} f_{b-z} \cdot dz$

$$= \int_{0}^{\beta-\alpha} f_{\beta-z} \cdot dz,$$

wo überall zur Rechten statt z jeder andere fremde Buchstabe gesetzt werden kann, weil das Endresultat von diesem Buchstaben z ganz unabhängig ist; namentlich könnte man wieder x statt z schreiben.

Als in der Formel N. 4. steckend, müßte also z. B. angesehen werden die Gleichung $\int_0^1 x^a(1-x)^b \cdot dx = \int_0^1 (1-x)^a x^b \cdot dx$, indem man in der N. 4. $\alpha = 0$, $\beta = b = 1$ nimmt und zuletzt rechts noch x statt z schreibt*).

Die Resultate N. 2.—N. 4. gelten übrigens auch noch, wenn α, β, b beliebig reell oder imaginär und von der Form $p+q\cdot i$ sind.

§. 98.

In manchen Fällen gewähren noch nachstehende Sätze bei der Auswerthung bestimmter Integrale große Bequemlichkeit, nämlich:

I. Wird, wenn man $x = \frac{1}{z}$ setzt, $f \cdot dx = -f_z \cdot dz$, so ist dann allemal

$$\int_{+0}^{1} f_x \cdot dx = \int_{1}^{\infty} f_x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\int_{+0}^{\infty} f_x \cdot dx \; **),$$

indem wir durch $+0$ das positive Unendlich-Kleine bezeichnen.

*) Die Richtigkeit dieser allerletzten Gleichung erhellet auch schon unmittelbar aus §. 84., da die beiden Summen links und rechts dieselben Summanden enthalten nur in umgekehrter Ordnung.

**) Dies ist z. B. der Fall, wenn $f_x = \frac{1}{1+x^2}$ ist, weil dann, wenn

Denn, wegen $z = \frac{1}{x}$, wird für $x = +0$, $z = \infty$ und für $x = 1$ auch $z = 1$, und es folgt daher der erstere Theil der Gleichung unmittelbar aus §. 97. N. 1. in Verbindung mit §. 88. N. 1. — Das Uebrige folgt dann aus §. 88. N. 2.

II. Ist b beliebig reell, so ist allemal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x\pm b} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx \quad \text{und noch} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{b-x} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx,$$

wie unmittelbar aus §. 97. hervorgeht, indem man bezüglich $x \pm b = z$ oder $b - x = z$ setzt, wenn nur die Integrale nicht unterbrochen und nicht divergent sind.

III. Ist a beliebig positiv, groß oder noch so klein, wenn nur nicht unendlich-klein, so ist allemal

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx$$

und noch

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ax^2} \cdot dx = \frac{1}{+\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x^2} \cdot dx,$$

wie unmittelbar aus §. 97. hervorgeht, indem man bezüglich $ax = z$ oder $x\sqrt{a} = z$ setzt; auch gelten diese letzteren beiden Gleichungen noch (aber nicht die obere in II.), wenn statt der untern Grenze $-\infty$ überall die Null stehen sollte. — Natürlich ist auch

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ax^n} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x^n} \cdot dx,$$

$x = \frac{1}{z}$ gesetzt wird, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, und $\frac{1}{1+x^2} = \frac{z^2}{z^2+(xz)^2} = \frac{z^2}{1+z^2}$ ist, also $f_x \cdot dx = \frac{z^2}{1+z^2} \cdot \left(-\frac{dz}{z^2}\right) = -\frac{1}{1+z^2} \cdot dz = -f_z \cdot dz$ wird. Deshalb hat man wirklich

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

wenn nur a beliebig positiv, n aber positiv ganz ist, und $\sqrt[n]{a}$ ihren positiven Werth vorstellt.

IV. Sind a und b beliebig positiv (und ist a nicht unendlich-klein), so ist allemal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ax-\frac{b}{x}} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx,$$

wenn nur keines der Integrale zu den unterbrochenen oder zu den divergenten gehört.

Denn es ist, wenn $z = ax - \frac{b}{x}$ gesetzt wird, $z = -\infty$ für $x = +0$ und $z = +\infty$ für $x = +\infty$, außerdem aber noch $dz = a \cdot dx + \frac{b}{x^2} \cdot dx$; folglich wird (nach §. 97.)

$$1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_z \cdot dz = a \int_{+0}^{\infty} f_{ax-\frac{b}{x}} \cdot dx + b \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot f_{ax-\frac{b}{x}} \cdot dx.$$

Setzt man nun aber in dem letzteren Integral

$$x = \frac{-b}{ay}, \text{ so ist } dx = +\frac{b}{ay^2} \cdot dy, \quad ax = -\frac{b}{y}, \quad \frac{b}{x} = -ay$$

und es wird $y = -\infty$ für $x = +0$, und $y = -0$ für $x = +\infty$; daher folgt:

$$2) \quad b \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot f_{ax-\frac{b}{x}} \cdot dx = a \int_{-\infty}^{-0} f_{ax-\frac{b}{x}} \cdot dx,$$

wo wir durch -0 das Negative Unendlich-Kleine bezeichnen. Wird dies nun in die Gleichung 1. substituirt, so geht unser Lehrsatz IV. sogleich hervor *).

---

*) Hätte man also z. B. auf irgend einem Wege gefunden $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}$, so würde nach dem Lehrsatze IV. sogleich noch hervorgehen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\pi},$$

d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)} \times e^{+2ab} \cdot dx = \frac{1}{a} \sqrt{\pi},$$

Schluß-Anmerkung.

Es setzen aber alle diese Formeln und Lehrsätze allemal stillschweigend zwar, aber unbedingt voraus, daß die bestimmten Integrale wirklich existiren, d. h. einen bestimmten Werth haben, also, daß sie zu den convergenten und ununterbrochenen gehören.

Wollte man auf diesen wichtigen Umstand nicht Rücksicht nehmen, so müßte man z. B. nach §. 88. N. 4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = 0$$

nehmen, weil $\frac{z}{z^2+1}$ der Bedingung $f_{-z} = -f_z$ entspricht; während doch

$$\int \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = \tfrac{1}{2} log(z^2+1)$$

ist, so daß

$$\int_{\infty \div 0} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = L\infty \quad \text{und} \quad \int_{0 \div (-\infty)} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = -L\infty$$

also

$$\int_{(+\infty) \div (-\infty)} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = L\infty - L\infty$$

sich ergiebt, welches Resultat nicht gerade Null, sondern unbestimmt ist.

In der That findet sich (nach §. 87.)

$$\int_{-\nu a}^{\mu a} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = \tfrac{1}{2} L \frac{\mu^2 a^2+1}{\nu^2 a^2+1},$$

---

d. h. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{a}\sqrt{\pi} \times e^{-2ab}$,

oder auch, wenn bezüglich a und b statt a^2 und b^2 gesetzt werden,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} \cdot dx = +\sqrt{\frac{\pi}{a}} \times e^{-2\sqrt{ab}},$$

wenn nur a und b beliebig positiv sind.

welches, wenn man Zähler und Nenner zur Rechten mit a^2 wegdividirt, für $a = \infty$, wenn μ und ν beliebig positiv sind, in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = L\frac{\mu}{\nu}$$

übergehen würde, wenn dieses bestimmte Integral convergent wäre, während der Ausdruck zur Rechten reell wäre aber mit μ und ν zugleich ganz unbestimmt bliebe.

Dieser Widerspruch, nach welchem dasselbe bestimmte Integral nach der einen Formel $= 0$, auf einem anderen Wege aber ganz unbestimmt gefunden wird, also auch $= 1$ wäre, oder wie man es annehmen wollte, löst sich aber sogleich, sobald man sich überzeugt, daß dasselbe Integral zu den divergenten gehört, also gar keinen Werth hat und daß deshalb von ihm nicht weiter die Rede seyn kann.

Wenn also Cauchy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2+1} \cdot dz = L\frac{\mu}{\nu}$ annimmt und μ und ν unbestimmt sich denkt, so muß ein anderer Begriff des bestimmten Integrals zu Grunde liegen als der unsrige, auf den wir im nächsten IX. Theile zurückkommen werden.

Vierte Abhandlung.

Theorie der reellen Faktoriellen und Fakultäten

und somit auch

der Gamma-Funktionen

d. h.

der Euler'schen Integrale

zweiter Klasse.

Achtes Kapitel.

Theorie der reellen (ganzen und gebrochenen) Faktoriellen.

Vorbemerkung.

Die Funktionen x^z, welche wir Potenzen nennen, spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Von einem unscheinbaren Anfange, nämlich von dem Produkte gleicher Faktoren ausgehend, haben sie von dem Augenblick an, wo Cartesius den Exponenten in die Bezeichnung mit aufnahm, die Möglichkeit gewonnen, zu der Allgemeinheit heranzureifen, die sie jetzt als Funktionen haben, — nach und nach alle Zwischenstufen der Verallgemeinerung durchgehend, — nämlich die negativen ganzen Potenzen (welche Quotienten aus Produkten gleicher Faktoren vorstellen) — die gebrochenen Potenzen (welche unendliche Reihen, aber eindeutig sind) — um zuletzt zu den allgemeinsten Potenzen zu gelangen, (welche ebenfalls unendliche Reihen vorstellen und dabei unendlich vieldeutig sind, und) welche alle früheren Begriffe der Potenzen als besondere Fälle in sich schließen. — Aus den Potenzen mit imaginären Exponenten setzen sich jene so äußerst merkwürdigen unendlichen Reihen zusammen, die wir Sinus und Cosinus nennen, deren periodische Wiederkehr ihrer Werthe sie geeignet macht zum analytischen Ausdruck alles in der Natur periodisch wiederkehrenden und die namentlich auch in ihrer Anwendung auf die Geometrie, — zunächst auf den Kreis, die Kugel und das Dreieck, — von vorzüglicher Wichtigkeit sich ausweisen und in dieser Anwendung das liefern, was man „ebene und sphärische Trigonometrie" nennt.

Die Grundeigenschaften aller dieser Potenzen sind in den 3 Gleichungen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m \cdot b^m = (ab)^m \quad \text{und} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

enthalten, zu denen noch der binomische Lehrsatz hinzutritt; doch bedürfen diese Gleichungen einer Korrektion, wenn sie auch für allgemeinste und selbst für gebrochene Potenzen allgemein wahr bleiben wollen, so nämlich, daß jede Seite der Gleichung die andere vollkommen ersetzt (S. Einleit. §. 8. und den „Geist d. Diff. u. Int. Rechn. Erlangen 1846. Einleitg. pag. 15.).

§. 99.

Geht man statt von Produkten gleicher, lieber von Produkten aequidifferenter (d. h. um gleich viel von einander verschiedener) Faktoren aus, etwa von dem Produkte

$$a(a+r)(a+2r)(a+3r) \cdots (a+(n-1)r),$$

bezeichnet man solches durch das Zeichen

$$a^{n|r},$$

so wird man dadurch zu neuen Funktionen geführt, die man Faktoriellen*) nennt, während a die Basis, r die Differenz und n der Exponent derselben heißt, und welche zwar nicht von demselben Umfange sind, und sich nicht auf dieselbe Allgemeinheit erheben, wie die Potenzen, welche jedoch ebenfalls eine, der der Potenzen ähnliche Rolle in der Analysis zu spielen bestimmt scheinen, in so ferne nämlich eine größere Anzahl analytischer Untersuchungen und Anwendungen auf diese Funktionen sich zurückführen lassen, von denen sie also gewissermaßen die Grundlage bilden.

Man definirt aber für einen positiven ganzen Werth von n, zunächst die ganze Faktorielle

$$1) \qquad a^{n|r} = a(a+r)(a+2r) \cdots (a+(n-1)r).$$

Den aus dieser Definition hervorgehenden Satz

$$a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{(a+(m-n)r)^{n|r}}$$

benützt man zur Definition der Faktorielle, deren Exponent $m-n$ eben so gut negativ ganz und 0 und 1 seyn kann als auch eine positive ganze Zahl. Danach stellt diese Differenz-Faktorielle einen Quotienten aus zwei Produkten aequidifferenter Faktoren vor und enthält die ganze Faktorielle als einen, die negative ganze Faktorielle als einen andern besondern Fall

*) Kramp hat sie anfänglich numerische Fakultäten, später aber Faktoriellen genannt.

in sich. — In dieser Definition stecken aber die speciellen Fälle

2) $$a^{-n|r} = \frac{1}{[a-nr][a-(n-1)r][a-(n-2)r]\cdots[a-2r][a-r]} = \frac{1}{(a-nr)^{n|r}} = \frac{1}{(a-r)^{n|-r}}$$ *);

3) $$a^{-1|r} = \frac{1}{a-r};$$

4) $$a^{0|r} = 1;$$

5) $$a^{1|r} = a.$$

Man muß jedoch dabei voraussetzen, daß keiner der Divisoren Null wird, also namentlich in 2., daß $\frac{a}{r}$ keiner der positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ⋯ n gleich ist, weil man sonst Ausdrücke hätte, welche in der Rechnung nicht mehr zulässig sind **).

Mögen nun die Exponenten der Faktoriellen positiv ganz oder negativ ganz oder Null seyn, so läßt sich doch immer leicht beweisen die Richtigkeit folgender Formeln:

6) $$a^{m|r} = (a+(m-1)r)^{m|-r};$$

7) $$a^{m+n|r} = a^{m|r}\cdot(a+mr)^{n|r} = a^{n|r}\cdot(a+nr)^{m|r};$$

und

8) $$a^{m|r} = \left(\frac{a}{h}\right)^{m|\frac{r}{h}}\cdot h^m,$$

*) Man muß sich, um schnell nach solchen Formeln rechnen zu lernen, die Umformungsregeln in Worten ausdrücken. Z. B. aus $a^{-n|r}$ wird der ihr gleiche Ausdruck gebildet, „wenn man die Differenz von der Basis sub„trahirt, Exponent und Differenz mit dem entgegengesetzten Vorzeichen ver„sieht und dann die neue Faktorielle in den Nenner schreibt, wenn die gege„bene im Zähler steht (oder die neue in den Zähler schreibt, wenn die gege„bene irgend wo einen Nenner bildet). U. s. w.

**) Diese Voraussetzung machen wir in der Folge stets und stillschweigend, weil dies eine Voraussetzung ist, die für alle Theile des Kalkuls ein für allemal gemacht wird, daß nämlich kein Ausdruck, mit welchem noch gerechnet wird, die Form $\frac{1}{0}$ annehmen darf.

was auch h, a und r bedeuten mögen, reelles oder imaginäres, so lange nur der Exponent der Faktorielle positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Diese Gleichungen 6.—8. enthalten die drei Haupteigenschaften der Faktoriellen; alle folgenden Nummern sind nur specielle Fälle ihrer Anwendung. Zunächst erhält man nämlich aus 7.:

9) $a^{m-n|r} = \dfrac{a^{m|r}}{(a+(m-n)r)^{n|r}}$;

10) $\dfrac{a^{m|r}}{a^{n|r}} = (a+nr)^{m-n|r}$;

11) $\dfrac{a^{n|r}}{b^{n|r}} = \dfrac{a^{(b-a):r|r}}{(a+nr)^{(b-a):r|r}}$,

wenn nur alle Exponenten positiv oder negativ ganz oder Null sind *).

Die einfachste aller Faktoriellen nämlich

$1^{n|1}$ oder $n^{n|-1}$ wird durch $n!$

bezeichnet und dieses Zeichen n Fakultät (oder die Fakultät von n) ausgesprochen (oder genannt), wobei n deshalb nicht negativ ganz gedacht werden kann, weil sonst (nach N. 2.) der durch $n!$ vorgestellte Quotient die Form $\frac{1}{0}$ annehmen würde. Dagegen kann n nicht bloß jede positive ganze Zahl mit Einschluß der 1, sondern auch Null seyn, und man hat demzufolge:

12) $n! = 1^{n|1} = n^{n|-1}$;

13) $1! = 1$ }
14) $0! = 1$ } (aus den NN. 4. 5.);

*) Wegen der Beweise kann man nachlesen den „Versuch e. v. k. Systems der Mathematik. 2ter Th. 2te Auflage. Berlin 1826. Man findet die Richtigkeit dieser Formeln, sobald man die Brüche wegschafft und die N. 7. anwendet.

endlich 15) $a^{n|r} = r^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}+n-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}$ *),

wenn nur die Exponenten der Faktoriellen positiv oder negativ ganz oder Null sind.

Durch diese N. 15. ist jede Faktorielle auf die einfachste derselben, nämlich auf die Fakultät gebracht.

Endlich folgt aus N. 1. und N. 2. noch, daß

16) $a^{n|0} = a^n$

ist, wenn n positiv oder negativ ganz oder Null und a beliebig reell oder imaginär gedacht wird.

Anmerk. Das hier im §. 99. mitgetheilte ist strenge erwiesen im „Syst. d. Math. Th. II. 2te Aufl. Kap. 15. — Was nun folgt ist die Fortsetzung jener Lehren.

§. 100.

Es kommt allemal, wenn c positiv oder negativ ganz oder Null und endlich ist, der Quotient $\frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|\pm 1}}$ der Einheit desto näher, je größer ν gedacht wird; und es ist

17) $\frac{(a+\nu)^{c|\pm 1}}{\nu^c} = 1$ für $\nu = \infty$, **)

---

*) Weil nach N. 8. $a^{n|r} = r^n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{n|1}$ und nach N. 10. wiederum $\frac{1^{(a:r)+n-1|1}}{1^{(a:r)-1|1}} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n|1}$ ist.

**) So oft wir in der Folge sagen werden: es sey

$f_\nu = a$ für $\nu = \infty$,

so verstehen wir jedesmal nichts anderes darunter als: „der Ausdruck f_ν „nähere sich (von irgend einem Werthe von ν ab) dem Werthe a desto „mehr, je größer ν genommen wird, und komme dem a unendlich nahe, „wenn ν bis in's Unendliche wächst.“ — Nach Cauchy würde man, um dasselbe auszudrücken, schreiben müssen:

wenn nur a beliebig reell und endlich ist. — Auch gilt dieselbe Gleichung noch für $\nu = -\infty$.

Denn, ist c positiv ganz, so hat man

$$\frac{(a+\nu)^{c|\pm1}}{\nu^c} = \frac{a+\nu}{\nu} \cdot \frac{\pm1+a+\nu}{\nu} \cdot \frac{\pm2+a+\nu}{\nu} \cdot \ldots \frac{\pm(c-1)+a+\nu}{\nu};$$

und da jeder dieser Faktoren, z. B. $\frac{\pm n+a+\nu}{\nu}$ die Form $1+\frac{\pm n+a}{\nu}$ annehmen kann, so hat das Produkt aus der endlichen Anzahl dieser Faktoren ebenfalls die Form $1+\frac{E}{\nu}+\cdots$, wo E endlich und ν unendlich groß ist. Also ist dasselbe Produkt für $\nu = \pm\infty$ der Einheit gleich, so lange nur a und n, d. h. a und c endlich sind.

Ist aber c negativ, etwa $= -b$, so ist (nach N. 2. und N. 8.)

$$\frac{\nu^c}{(a+\nu)^{c|\pm1}} = \frac{\nu^{-b}}{(a+\nu)^{-b|\pm1}} = \frac{(a\mp b+\nu)^{b|\pm1}}{\nu^b} = \left(1+\frac{a\pm b}{\nu}\right)^{b|(1:\nu)},$$

wo wieder das Produkt der b Faktoren, für $\nu = \pm\infty$ offenbar der Einheit gleich wird.

Aus der Gleichung N. 7. für $r = 1$, nämlich aus

$$a^{c|1} = \frac{a^{\nu|1}}{(a+c)^{\nu|1}} \cdot (a+\nu)^{c|1},$$

wenn c positiv oder negativ ganz oder Null ist, folgt also, sobald man solche mit der vorstehenden 17. multiplicirt,

$$18) \qquad a^{c|1} = \frac{a^{\nu|1}}{(a+c)^{\nu|1}} \cdot \nu^c \quad \text{für} \quad \nu = \begin{Bmatrix} \pm\infty \\ \text{u. ganz} \end{Bmatrix};$$

so lange nur a und c endlich sind und c positiv oder negativ ganz; also ist auch noch für $a = 1$ (nach N. 12.)

$$19) \qquad c! = \frac{\nu!}{(1+c)^{\nu|1}} \cdot \nu^c \quad \text{für} \quad \nu = \begin{Bmatrix} +\infty \\ \text{u. ganz} \end{Bmatrix}^{*)},$$

$$\lim f_\nu = a;$$

der Verf. hat aber gegen diese Schreibweise eine Antipathie, die der geneigte Leser ihm zu Gute halten möge (S. Vorrede.).

*) Für $\nu = -\infty$ und ganz darf $\nu!$ in der Rechnung nicht mehr beibehalten werden, weil dann Null im Nenner erscheint.

so lange nur c endlich ist, übrigens positiv oder negativ ganz oder Null.

Multiplicirt man aber in N. 18. Zähler und Nenner zur Rechten mit r^ν, sowie die ganze Gleichung links und rechts mit r^c, und setzt man zuletzt $\frac{a}{r}$ statt a, so ergiebt sich noch:

$$20) \quad a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c, \quad \text{für} \quad \nu = \left\{ \begin{matrix} \pm\infty \\ \text{u. ganz} \end{matrix} \right\},$$

so lange nicht Null im Nenner erscheint, und unter der Voraussetzung, daß c positiv oder negativ ganz oder Null ist, und daß a und c nicht unendlich-groß sind *).

§. 101.

Dieser Gleichung N. 20. kann man sich nun bedienen, um die reelle Faktorielle zu definiren, d. h. die Faktorielle $a^{c|r}$, in welcher der Exponent c eben so wie die Basis a und die Differenz r beliebig reell, d. h. ganz oder gebrochen, positiv oder negativ gedacht sind. — Man muß nur die Definition so einrichten, daß $(\nu r)^c$ stets einen reellen Werth habe, es mag r positiv oder negativ seyn, und deshalb muß man den Fall, wo r positiv ist, von dem Fall, wo r negativ ist, genau und sorgfältig unterscheiden.

Wir führen demnach als Definition der reellen Faktorielle $a^{c|r}$, indem wir a und c beliebig reell aber nicht unendlich-groß voraussetzen, ein die Gleichung:

---

*) Den Anfänger machen wir noch besonders darauf aufmerksam, daß die N. 20. eigentlich nur eine ganz unmittelbare Folge der Haupteigenschaft der ganzen Faktorielle ist (N. 7.), nämlich

$$a^{c|r}(a+cr)^{\nu|r} = a^{\nu|r}(a+\nu r)^{c|r},$$

weil jedes der beiden Produkte, $= a^{c+\nu|r}$ ist. Es ist nur, wenn $\nu = \infty$, νr statt $a+\nu r$ gesetzt, und die Differenz r gegen die Basis $a+\nu r$ oder νr außer Acht gelassen. Im §. 100. ist dieser Idee nur der gründliche Halt gegeben.

I. $$a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c \quad \text{für } \nu = \pm\infty, \text{ je nachdem } r \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix},$$

indem man $\nu = +\infty$ (und ganz) sich denkt, wenn r positiv ist, dagegen $\nu = -\infty$ (und ganz) sich denken muß, wenn r negativ ist, jedesmal aber voraussetzt, daß die Potenz $(\nu r)^c$ ihren positiven Werth vorstellt.

Diese Definition I. giebt also für einen positiven Werth von r (so daß $-r$ negativ wird) noch besonders (indem man in der I. $-r$ statt r, zugleich aber $-\nu$ statt ν setzt, um das neue ν wiederum bloß positiv sich denken zu dürfen)

II. $$\left.\begin{aligned} a^{c|-r} &= \frac{a^{-\nu|-r}}{(a-cr)^{-\nu|-r}} \cdot (\nu r)^c \\ \text{(nach N. 2.)} &= \frac{(a+r-cr)^{\nu|r}}{(a+r)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c \end{aligned}\right\} \text{für } \nu = \begin{Bmatrix} +\infty \\ \text{u. ganz} \end{Bmatrix}$$

wodurch die Trennung der Definition für beide Fälle, a) wenn die Differenz der Faktorielle positiv, b) wenn sie negativ ist, noch entschiedener in die Augen fällt. Dieselbe Gleichung I. giebt nämlich, wenn r positiv ist,

II. 1. $$a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c \quad \text{für } \nu = \begin{Bmatrix} +\infty \\ \text{u. ganz} \end{Bmatrix}.$$

Ferner bezeichnen wir, wie wenn c positiv ganz oder Null ist, auch für jeden reellen und nicht unendlich-großen Werth von c (der nicht negativ ganz ist) wiederum die einfachste Faktorielle

$1^{c|1}$ durch $c!$,

so daß man als Definition hat (welche die Nummern 12.—14. des §. 99. in sich schließt)

III. $$c! = 1^{c|1} = \frac{\nu!}{(1+c)^{\nu|1}} \cdot \nu^c \quad \text{für } \nu = \begin{Bmatrix} +\infty \\ \text{u. ganz} \end{Bmatrix};$$

und wir nennen dies Zeichen $c!$ abermals die Fakultät des Exponenten c. *)

---

*) Gauß in der Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem

Es ist deshalb auch noch (nach II., wenn 1 statt r, und c statt a gesetzt wird)

---

etc. etc. im 2ten Bande der Göttinger Kommentarien bezeichnet denselben Ausdruck, den wir hier so eben durch c! bezeichnet haben, während c beliebig reell (nur nicht negativ ganz) gedacht ist, durch Π_c, und er beweist noch besonders, daß dieser durch Π_c (oder c!) bezeichnete Ausdruck $\frac{1^{\nu|1}}{(1+c)^{\nu|1}}\cdot\nu^c$ für $\nu=+\infty$, allemal einen völlig bestimmten reellen Werth hat. — Dieser Beweis ist dem Wesen nach folgender:

Erstlich bezeichnet Gauß durch $\Pi_{\nu,c}$ denselben Ausdruck $\frac{\nu!}{(1+c)^{\nu|1}}\cdot\nu^c$ für den Fall, daß ν noch einen endlichen Werth hat, so daß $\Pi_{\nu,c}$ in c! übergeht, so oft $\nu=\infty$ genommen wird. Dann folgt unmittelbar für jeden positiven ganzen Werth von h

$$1)\quad \frac{\Pi_{h+1,c}}{\Pi_{h,c}}=\frac{(h+1)^{c+1}}{h^c(h+1+c)}=\left(\frac{h+1}{h}\right)^c\cdot\frac{1}{1+\frac{c}{h+1}}=\left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{-c}\cdot\frac{1}{1+\frac{c}{h+1}};$$

folglich, wenn man links und rechts die Logarithmen nimmt, und dabei h größer als den absoluten Werth von c sich denkt, damit die Reihen convergiren:

$$2)\quad Log\,\Pi_{h+1,c}=Log\,\Pi_{h,c}+\frac{c(1+c)}{2(h+1)^2}+\frac{c(1-c^2)}{3(h+1)^3}+\frac{c(1+c^3)}{4(h+1)^4}+\frac{c(1-c^4)}{5(h+1)^5}+\text{ꝛc. ꝛc.},$$

in so ferne

$$Log\left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{-c}=-c\cdot Log\left(1-\frac{1}{h+1}\right)=\frac{c}{h+1}+\frac{c}{2(h+1)^2}+\frac{c}{3(h+1)^3}+\text{ꝛc. ꝛc.}$$

ist, und

$$Log\left(1+\frac{c}{h+1}\right)=\frac{c}{h+1}-\frac{c^2}{2(h+1)^2}+\frac{c^3}{3(h+1)^3}-\text{ꝛc. ꝛc.}$$

von dem vorigen Logarithmen subtrahirt werden muß. —

Setzt man nun hier nach und nach h+1, h+2, ... h+n−1 statt h und addirt man alle entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$3)\quad Log\,\Pi_{h+n,c}=Log\,\Pi_{h,c}+S,$$

III. 1. $c^{c|-1} = 1^{c|1} = c!$,

während c beliebig reell gedacht wird und nicht unendlich-groß.

---

wo S die Summe von n convergenten Reihen ist, welche auch so geordnet werden können, nämlich

$$4)\quad S = \tfrac{1}{2}c(1+c)\cdot\left[\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{1}{(h+2)^2}+\frac{1}{(h+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^2}\right]$$
$$+\tfrac{1}{3}c(1-c^2)\cdot\left[\frac{1}{(h+1)^3}+\frac{1}{(h+2)^3}+\frac{1}{(h+3)^3}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^3}\right]$$
$$+\tfrac{1}{4}c(1+c^3)\cdot\left[\frac{1}{(h+1)^4}+\frac{1}{(h+2)^4}+\frac{1}{(h+3)^4}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^4}\right]$$
$$+ \text{ in inf.}$$

Denkt man sich nun h endlich (aber größer als der absolute Werth von c), nimmt man dagegen $h+n = \nu = \infty$, so geht $\Pi_{h+n,c}$ in $c!$ und die Horizontalreihen in dem Ausdrucke für S, gehen in unendliche, aber convergente Reihen über. Ferner ist $\Pi_{h,c}$ d. h. $\frac{1^{h|1}}{(1+c)^{h|1}}\cdot h^c$, so oft c nicht negativ ganz ist (weil sonst der Ausdruck die Form $\frac{1}{0}$ annimmt) allemal ein bestimmter endlicher Werth; folglich ist Π_c oder $c!$ allemal ein bestimmter endlicher Werth, so oft die in dem Ausdruck für S zur Rechten in 4.) vorkommende (vertikal geschriebene) unendliche Reihe (deren Glieder alle selbst wieder convergente unendliche Reihen sind) ebenfalls als convergent erkannt wird. Dies letztere ist aber deshalb der Fall, weil h größer als der absolute Werth von c gedacht worden ist. — Also hat $c!$ immer einen bestimmten endlichen reellen Werth, nur nicht wenn c negativ ganz ist. — Dieß ist der Beweis des Gauß, dem Wesen nach. —

Versteht man aber unter $\Pi_{\nu,c}$ den noch allgemeineren Ausdruck $\frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}}\cdot(\nu r)^c$ in I. zur Rechten für jeden endlichen Werth von ν, so hat man noch, wenn der Kürze wegen $\frac{a}{r} = b$ gesetzt wird,

$$\frac{\Pi_{h+1,c}}{\Pi_{h,c}} = \left(\frac{h+1}{h}\right)^c\cdot\frac{1}{1+\frac{c}{b+h}} = \left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{-c}\cdot\frac{1}{1+\frac{c}{h+b}},$$

folglich

§. 102.

Aus diesen Definitionen folgen nun sogleich die drei Haupt-Eigenschaften der **reellen** Faktoriellen (welche für **ganze** Ex-

---

$$Log\,\Pi_{h+1,c} = Log\,\Pi_{h,c} + \frac{c}{h+1} + \frac{c}{2(h+1)^2} + \frac{c}{3(h+1)^3} + \text{rc. rc.}$$
$$-\left(\frac{c}{h+b} - \frac{c^2}{2(h+b)^2} + \frac{c^3}{3(h+b)^3} - \text{rc. rc.}\right)$$

wenn man nur h so groß (positiv ganz) nimmt, daß $h+b$ größer wird als der absolute Werth von c; d. h. es ist, wenn man immer zwei unter einander stehende Glieder beider unendlichen Reihen vereinigt,

$$Log\,\Pi_{h+1,c} = Log\,\Pi_{h,c} + c\cdot\frac{b-1}{(h+1)(h+b)} + \tfrac{1}{2}c\left(\frac{1}{(h+1)^2} + \frac{c}{(h+b)^2}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}c\left(\frac{1}{(h+1)^3} - \frac{c^2}{(h+b)^3}\right) + \tfrac{1}{4}c\left(\frac{1}{(h+1)^4} + \frac{c^3}{(h+b)^4}\right) + \text{rc. rc.}$$

Setzt man nun hier herein nach und nach wieder $h+1$, $h+2$, ... $h+n-1$ statt h und addirt man wieder alle Gleichungen, so erhält man noch

$$Log\,\Pi_{h+n,c} = Log\,\Pi_{h,c} + c(b-1)\left[\frac{1}{(h+1)(h+b)} + \frac{1}{(h+2)(h+1+b)} + \cdots + \frac{1}{(h+n)(h+n-1+b)}\right]$$
$$+ \left\{\begin{matrix}\text{Glieder, welche für } n=\infty \text{ entschieden eine} \\ \text{endliche Summe haben, da } h+b>\pm c\end{matrix}\right\}.$$

Da nun der Ausdruck $\Pi_{h,c}$ allemal einen bestimmten Werth hat, so lange nicht, weil $h+b>\pm c$ ist, $b+c=0$ oder negativ ganz ist (d. h. so lange sein Nenner nicht 0 wird), so hat auch $\Pi_{h+n,c}$ für $h+n=\nu=\infty$ d. h. (nach I.) $a^{c|r}$, für jeden reellen Werth von a und c einen bestimmten reellen Werth, wenn r **positiv** ist.

Ganz dasselbe läßt sich auf dieselbe Weise von dem 2ten Ausdruck zur Rechten in II. d. h. von $a^{c|-r}$ beweisen.

Also hat nach den obigen Definitionen I. u. II. die **reelle** Faktorielle $a^{c|r}$, wo a, c und r beliebig **reell** (ganz oder gebrochen) sind, allemal einen bestimmten reellen Werth, mit den einzigen Ausnahmen α) bei einem positiven Werth von r, wenn $\frac{a}{r}+c$ Null oder **negativ** ganz ist, und β) bei einem negativen Werth von r, wenn a negativ und so ist, daß $1-\frac{a}{r}$ Null oder **negativ ganz** wird, weil in diesen Ausnahmsfällen der

ponenten bereits in den Nummern 6.–8. hingestellt sind); nämlich als erste Haupteigenschaft die Gleichung

IV. $$a^{c|r} = (a+(c-1)r)^{c|-r},$$

wenn nur a, c und r beliebig reell sind *).

Ferner hat man als zweite Haupteigenschaft der reellen Faktoriellen die Gleichung

V. $$a^{m+n|r} = a^{m|r}\cdot(a+mr)^{n|r} = a^{n|r}\cdot(a+nr)^{m|r},$$

wie auch a, m, n, r reell gegeben seyn mögen, wenn nur keine der Basen und keiner der Exponenten unendlich-groß ist, und keiner der Ausdrücke die Null im Nenner erhält, während letztere Ausnahmen in der gesammten Analysis sich so von selber verstehen, daß wir von nun an nicht mehr besonders daran erinnern wollen **).

Ausdruck, den die Faktorielle $a^{c|r}$ vorstellt, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, mit welcher keine Rechnung mehr statt finden darf.

*) Setzt man nämlich in §. 101. II., unter der Voraussetzung, daß r positiv ist, statt a jetzt a+(c–1)r, so findet sich, wenn man den zweiten Ausdruck nimmt

$$(a+(c-1)r)^{c|-r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}}\cdot(\nu r)^c \quad \text{für} \quad \nu = +\infty;$$

und dieser Ausdruck zur Rechten ist (nach §. 101. I., oder nach §. 101. II. 1.) auch genau die Bedeutung von $a^{c|r}$, wenn r positiv. —

Ist aber r negativ, folglich –r positiv, so giebt dieselbe so eben erwiesene Formel IV., wenn man daselbst statt r die jetzt durch –r ausgedrückte positive Zahl setzt, augenblicklich

$$(a+(c-1)r)^{c|-r} = a^{c|r},$$

welche Gleichung dieselbe Formel IV. ist, unter der Voraussetzung jedoch, daß r negativ.

**) Der Beweis dieser Formel mag noch hier stehen.

Es ist nach der Definition in I.

$$\left.\begin{aligned} a^{m|r} &= \frac{a^{\nu|r}}{(a+mr)^{\nu|r}}\cdot(\nu r)^m, \\ (a+mr)^{n|r} &= \frac{(a+mr)^{\nu|r}}{(a+(m+n)\cdot r)^{\nu|r}}\cdot(\nu r)^n \end{aligned}\right\} \text{für } \nu = \pm\infty, \text{ je nachdem } r \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}.$$

In dieser Formel V. stecken aber noch folgende:

V. 1. $$a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{(a+(m-n)r)^{n|r}},$$

wenn m, n, a und r beliebig reell gedacht werden*);

V. 2. $a^{1|r} = a$, folglich $1! = 1$;

V. 3. $a^{0|r} = 1$, folglich $0! = 1$;**)

V. 4. $a^{-n|r} = \dfrac{1}{(a-nr)^{n|r}}$

V. 5. $a^{-n|r} = \dfrac{1}{(a-r)^{n|-r}}$

(V. 4. und V. 5.: aus V. 1. für m = 0, und aus IV.)

wie auch jedesmal a, r und n, wenn nur reell, vorausgesetzt seyn mögen; ferner

V. 6. $a^{c|r} = a\cdot(a+r)^{c-1|r} = a^{c-1|r}\cdot(a+(c-1)r)$; ***)

V. 7. $$\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+cr)^{(b-a):r|r}} = \frac{(b+cr)^{(a-b):r|r}}{b^{(a-b):r|r}};\ \dagger)$$

V. 8. $$\frac{a^{b|r}}{a^{c|r}} = (a+cr)^{b-c|r};\ \dagger\dagger)$$

Multiplicirt man nun diese beiden Gleichungen mit einander, so giebt dies

$$a^{m|r}\cdot(a+mr)^{n|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+(m+n)r)^{\nu|r}}\cdot(\nu r)^{m+n}$$

für $\nu = \pm\infty$, je nachdem r $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist;

und dieser Ausdruck zur Rechten ist (wiederum nach §. 101. I.) nichts weiter als $a^{m+n|r}$.

*) Man erhält dies sogleich, wenn man in der V. m—n statt m setzt.

**) Die V. 2. und die V. 3. folgen aus der V., wenn man in letzterer $m = n+1$ und auch $m = n$ setzt, dabei aber n positiv ganz sich denkt und statt der Faktoriellen die Produkte äquidifferenter Faktoren schreibt, denen sie nach I. und II. des §. 101. und §. 100. N. 20. gleich sind.

***) Aus der V., wenn man $m = 1$ und $n = c-1$, oder $m = c-1$ und $n = 1$ setzt und die V. 2. zu Hilfe nimmt.

†) Weil (nach V.) die Kreuzprodukte einander gleich sind.

††) Aus V., wenn $m = c$ und $n = b-c$ gesetzt wird.

V. 9. $a^{c|1} = \frac{(a+c-1)!}{(a-1)!}$ (aus III. u. V. 8.);

so wie noch (aus V. 6. und V. 9.)

V. 10. $b! = b^{b|-1} = b \cdot (b-1)!$;

V. 11. $(b-1)! = (b-1)^{c|-1} \cdot (b-c-1)!$
$= (b-c-1)! \times (b-c)^{c|1}$,

während überall a, b, c und r beliebig reell (positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational) gedacht sind. — Durch die Formel V. 9. ist aber jede Faktorielle mit der Differenz +1 (also, nach IV., auch jede Faktorielle mit der Differenz −1) allemal in Fakultäten ausgedrückt, wie auch sonst die Basis a und die Differenz r, wenn nur reell, gegeben seyn mögen*).

---

*) Es wird am Ende des Kapitels gezeigt werden, einmal, daß für jeden positiven Werth von x

$$\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{x-1} \cdot dz \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \left(L\frac{1}{z}\right)^{x-1} \cdot dz = (x-1)!$$

ist, und dann, daß man dieses bestimmte Integral häufig durch Γ_x bezeichnet und Gamma-Funktion nennt, so daß man die vorstehende Gleichung auch so schreiben kann, nämlich

$$\Gamma_x = (x-1)! \quad \text{oder} \quad z! = \Gamma_{1+z},$$

wenn z zwischen −1 und +∞ liegt; dann folgt, daß die Formeln V. 9.—V. 11. auch Eigenschaften der sogenannten Gamma-Funktionen (die auch die Euler'schen Integrale zweiter Klasse genannt werden) aussprechen, nämlich:

V. 9. $a^{c|1} = \frac{\Gamma_{a+c}}{\Gamma_a}$,

V. 10. $\Gamma_{b+1} = b \cdot \Gamma_b$,

V. 11. $\Gamma_b = (b-1)^{c|-1} \cdot \Gamma_{b-c}$
$= (b-c)^{c|1} \cdot \Gamma_{b-c}$,

während hier (viel allgemeiner als in der Lehre der Gamma-Funktionen gewöhnlich nachgewiesen wird) c nicht bloß positiv ganz, sondern beliebig reell gedacht ist.

Endlich kommt die dritte Haupteigenschaft der reellen Faktoriellen, nämlich

VI. $$a^{c|r} = \left(\frac{a}{h}\right)^{c|(r:h)} \times h^c,$$

wenn nur a und c und r beliebig reell, dagegen h beliebig positiv gedacht werden und wenn die Potenz h^c ihren positiven Werth vorstellt*).

Ist dagegen der Exponent c positiv oder negativ ganz oder Null, so gilt die Formel VI. für jeden positiven oder negativen, reellen oder imaginären Werth von h (nach §. 99. N. 8.).

Daraus folgt aber noch:

VI. 1. $a^{c|r} = r^c \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{c|1}$, wenn r positiv ist,

---

*) Es ist nämlich (nach I.)

1) $$a^{c|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+cr)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^c, \text{ für } \nu = \pm\infty, \text{ je nachdem } r \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$$

2) $$\left(\frac{a}{h}\right)^{c|(r:h)} = \frac{(a:h)^{\nu|(r:h)}}{\left(\frac{a+cr}{h}\right)^{\nu|(r:h)}} \cdot \left(\nu \frac{r}{h}\right)^c$$

$$\text{für } \nu = \pm\infty, \text{ je nachdem } \frac{r}{h} \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}.$$

Wird nun h positiv vorausgesetzt, so haben r und $\frac{r}{h}$ einerlei Vorzeichen, und es ist daher nun in beiden vorstehenden Gleichungen (1. und 2.) $\nu = +\infty$, wenn r positiv, und in beiden zugleich $\nu = -\infty$, wenn r negativ ist. Da also dann in beiden Gleichungen (1. u. 2.) die Bedeutung von ν eine und dieselbe ist, so erhält man, sobald in der 2.) Zähler und Nenner mit h^ν multiplicirt und §. 99. N. 8. angewandt wird, aus der Vergleichung beider augenblicklich die obige Gleichung VI.

Ist dagegen h negativ, so hat nach der Definition der reellen Faktorielle in I., der Buchstabe ν in beiden Gleichungen 1. und 2. jedesmal eine verschiedene Bedeutung, in so ferne er in der einen positiv genommen werden muß, sobald er in der andern negativ ist und umgekehrt, und die gedachte Vergleichung findet daher nun nicht mehr statt.

und die Potenz r^c ihren positiven Werth vorstellt; ferner (in Verbindung mit V. 9.)

VI. 2. $$a^{c|r} = r^c \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}+c-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}, \quad \text{wenn } r \text{ positiv},$$

während a und c beliebig reell vorausgesetzt werden und die Potenz r^c stets ihren positiven Werth vorstellt. — Aber eben deshalb ist auch noch (nach IV.)

VI. 3. $$a^{c|-r} = (a+r-cr)^{c|r} = r^c \cdot \frac{(a:r)!}{\left(\frac{a}{r}-c\right)!}, \quad \text{wenn } r \text{ positiv},$$

also $-r$ negativ ist. — Daß die Potenz r^c stets ihren positiven Werth vorstellt, wollen wir in der Folge nicht mehr besonders erwähnen, sondern immer stillschweigend voraussetzen.

Durch die Formeln VI. 2. und VI. 3. sieht sich aber jede Faktorielle auf die einfachsten der Faktoriellen, nämlich auf die Fakultäten zurückgeführt.*)

Deshalb läßt sich nun aber auch der n^{te} Binomial-Koeffizient der m^{ten} Potenz eines Binomiums (auch wenn m positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational ist, und den wir stets durch m_n bezeichnen, während er $= \frac{m^{n|-1}}{n!}$ ist), allemal in lauter Fakultäten ausdrücken; denn man findet aus VI. 3. (für $r = 1$, $c = n$ und $a = m$) ohne Weiteres

VI. 4. $$m_n = \frac{m!}{(m-n)!\; n!},$$

während zwar n positiv ganz gedacht wird, aber $m-n$ wie m ganz beliebig reell seyn können.

*) Wollte man als bekannt voraussetzen, daß $(x-1)! = \Gamma_x$ ist, so oft x positiv gedacht wird, — so wäre mittelst der Formeln VI. 2. und VI. 3. jede reelle Faktorielle in allen den Fällen in Gamma-Funktionen ausgedrückt, in welchen die Zeiger (die Veränderlichen) dieser letztern positiv werden.

Ist endlich der Exponent c positiv oder negativ ganz oder Null, so gelten diese Formeln VI. 1.—VI. 3. für jeden positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen, ja selbst imaginären Werth von r (nach §. 99., dessen N. 15. schon mit der VI. 2. übereinstimmt).

Anmerkg. In dem vorliegenden §. 102. ist aber nun alles zusammengedrängt, was für die Theorie der reellen Faktoriellen und für das Rechnen mit denselben nur immer wichtig und wissenswerth ist, sobald man nur damit verbindet,

1) daß die Faktorielle mit positivem ganzem Exponenten ein Produkt von eben so vielen äquidifferenten Faktoren bedeutet, und

2) daß die in IV.—VI. ausgesprochenen drei Haupteigenschaften der reellen d. h. der allgemeinsten Faktoriellen solche sind, die jeder Anfänger den Produkten äquidifferenter Faktoren zu jeder Zeit auf's Neue ohne Weiteres absehen kann.

Daß Kramp bei seinem Mangel an gründlicherer Kenntniß der Elemente des Kalkuls, die Formel VI., weil sie bei ganzen Exponenten für jeden Werth von h gilt, überhaupt für allgemeingültig gehalten und sie in allen Fällen angewandt hat, auch in denen, wo sie nicht gilt, — solches ist als die eine der beiden Hauptquellen aller der Widersprüche anzusehen, in welche er sich in seiner Analyse des réfractions astron. et terrestres 1799 (im 3ten Kapitel) verwickelt sieht*). — Daß

---

*) Setzte man z. B. in der Formel VI., -1 statt h, so erhielte man

$$a^{c|r} = (-a)^{-c|r} \cdot (-1)^c;$$

daraus folgerte dann, für $c = \frac{1}{2}$

$$a^{\frac{1}{2}|r} = (-a)^{-\frac{1}{2}|r} \cdot \sqrt{-1},$$

während $a^{\frac{1}{2}|r}$ und $(-a)^{-\frac{1}{2}|r}$ der Definition I. zufolge (welche Kramp zwar nicht ausspricht, aber offenbar, vielleicht sich selbst unbewußt im Hintergrunde hat) reelle Werthe haben, so daß diese letztere Gleichung eine entschiedene Unrichtigkeit enthält.

man aber die so höchst wichtige Idee des Kramp später so wenig beachtet hat, kann nur bedauert werden.

§. 103.

Jeden der beiden gleichen Quotienten in V. 7., nämlich

$$\frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+cr)^{(b-a):r|r}}$$

kann man (nach V. 5.) in einen Quotienten verwandeln, in welchem Zähler und Nenner abermals Faktoriellen mit gleichem Exponenten und gleicher Differenz sind, wo aber beide letzteren die entgegengesetzten Vorzeichen haben. Wenn man nun auf Zähler und Nenner eines jeden der 4 gleichen Quotienten, die man nun hat, noch die Formel IV. anwendet, durch welche das Vorzeichen des Exponenten unverändert bleibt, das der Differenz dagegen das entgegengesetzte wird, so erhält man 8 gleiche Quotienten, deren Zähler und Nenner jedesmal Faktoriellen mit gleichem Exponenten und gleicher Differenz sind, während die letztern zugleich alle Kombinationen der Vorzeichen aufweisen. — Es findet sich also:

$$\text{VII.} \quad \frac{a^{c|r}}{b^{c|r}} = \frac{(b-r)^{-c|-r}}{(a-r)^{-c|-r}} = \frac{(b+cr)^{-c|r}}{(a+cr)^{-c|r}} = \frac{(a-r+cr)^{c|-r}}{(b-r+cr)^{c|-r}}$$
$$= \frac{a^{(b-a):r|r}}{(a+cr)^{(b-a):r|r}} = \frac{(a-r+cr)^{(a-b):r|-r}}{(a-r)^{(a-b):r|-r}}$$
$$= \frac{(b+cr)^{(a-b):r|r}}{b^{(a-b):r|r}} = \frac{(b-r)^{(b-a):r|-r}}{(b-r+cr)^{(b-a):r|-r}}.$$

Wenn man sich in der Bildung dieser 8 gleichen Quotienten etwas einübt, so begegnet man bei dem Rechnen mit Faktoriellen nicht leicht mehr einer Schwierigkeit *).

---

*) Man erkennt die Gleichheit je zweier dieser 8 Quotienten auch ohne Weiteres dadurch, daß man von der Gleichheit der Kreuzprodukte sich überzeugt, und zwar einzig und allein vermöge der zweiten (in V. ausgedrückten) Haupteigenschaft der Faktoriellen, höchstens noch mit Zuziehung von $a^{0|d} = 1$ (S. V. 3.).

§. 104.

Während die Definitionen §. 101. I.—III. die gebrochenen Faktoriellen auf die ganzen zurückführen, d. h. auf Produkte äquidifferenter, wenn auch unendlich-vieler Faktoren, — können dieselben Gleichungen noch dazu benutzt werden, um Quotienten (Verhältnisse) solcher ganzen Faktoriellen in gebrochene Faktoriellen, d. h. um (der Form nach) elementare Ausdrücke in transcendente umzuformen.

Namentlich giebt die III. des §. 101., wenn $1+c=b$ und auch $1+c=a$ gesetzt wird, und wenn man dann die entstehenden Gleichungen durch einander dividirt:

VIII. $$\frac{(b-1)!}{(a-1)!}=\frac{a^{\nu|1}}{b^{\nu|1}}\cdot\nu^{b-a}$$ für $\nu=+\infty$ und ganz,

während man (aus §. 101. III., wenn daselbst $a-1$ statt c gesetzt wird) in solchen Verhältnissen auch einzeln

IX. $$a^{\nu|1}=\frac{\nu!}{(a-1)!}\cdot\nu^{a-1}$$ für $\nu=+\infty$ und ganz,

folgern kann, wenn dieser Gleichung an sich auch keine andere Bedeutung als die der II. des §. 101. untergelegt werden darf.

Von dieser Umformung (der ganzen Faktoriellen in gebrochene) kann man aber die erfolgreichsten Anwendungen machen, in so ferne dadurch die **elementarste** Gleichung zwischen Produkten, zu einer Gleichung zwischen **den** Transcendenten führt, die wir **gebrochene** Faktoriellen nennen (und welche später in besonderem Falle in Gamma-Funktionen übergehen werden). Die nachstehenden Beispiele mögen dies näher nachweisen.

§. 105.

Erstes Beispiel. Drückt man $Sin\, a\pi$ und $Sin\, b\pi$ (nach Einleitg. §. 13.) in Produkte von unendlich-vielen Faktoren aus, so findet sich sogleich:

$$\frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{a^{\nu|1} \cdot (1-a)^{\nu|1}}{b^{\nu|1} \cdot (1-b)^{\nu|1}} = \frac{a^{\nu|1}}{b^{\nu|1}} \cdot \frac{(1-a)^{\nu|1}}{(1-b)^{\nu|1}} \text{ für } \nu = +\infty,$$

wo a und b beliebig reell vorausgesetzt werden. Setzt man nun hier herein statt der Verhältnisse der ganzen Faktoriellen, die ihnen gleichen Ausdrücke aus VIII., so erhält man augenblicklich:

$$\text{X.} \qquad \frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{(b-1)!}{(a-1)!} \cdot \frac{(-b)!}{(-a)!} = \frac{(b-1)!\ (-b)!}{(a-1)!\ (-a)!}$$

$$\text{(nach §. 102. V. 9. u. V. 4.)} = a^{b-a|1} \cdot (1-a)^{-(b-a)|1} = \frac{(+a)^{b-a|+1}}{(-a)^{b-a|-1}}$$

$$\text{(nach §. 102. IV. u. V. 4.)} = \frac{a^{b-a|1}}{(1-b)^{b-a|1}} = \frac{(1-a)^{a-b|1}}{b^{a-b|1}}$$

$$\text{(nach §. 102. V. 7. u. V. 4.)} = \frac{a^{1-a-b|1}}{b^{1-a-b|1}} = \frac{(1-a)^{a+b-1|1}}{(1-b)^{a+b-1|1}}.$$

So oft also in dem Quotienten $\frac{a^{c|1}}{b^{c|1}}$ zweier Faktoriellen, die denselben Exponenten und die Differenz 1 haben, die Summe $a+b+c$ der beiden Basen a und b, und des gemeinschaftlichen Exponenten c, der Einheit gleich wird, so oft ist dieser Quotient $= \frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi}$, also auch

$$= \frac{Sin(1-a)\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{Sin\, a\pi}{Sin(1-b)\pi} = \frac{Sin(1-a)\pi}{Sin(1-b)\pi}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung X., nämlich die Gleichung

$$\frac{Sin\, a\pi}{Sin\, b\pi} = \frac{a^{1-a-b|1}}{b^{1-a-b|1}}$$

mit b, bedenkt man dabei, daß (nach §. 102. V. 6.) $b^{1-a-b|1} = b \cdot (1+b)^{-a-b|1}$ ist, und setzt man nachgehends $b = 0$, so erhält man (weil $\frac{Sin\, b\pi}{b}$ für $b = 0$ in π übergeht, zuletzt wegen §. 102. V 9.)

XI. $\begin{cases} \dfrac{Sin\, a\pi}{\pi} = \dfrac{a^{1-a|1}}{1^{-a|1}} = a^{1-a|1} \cdot (1-a)^{a|1} = \dfrac{1}{(a-1)!\,(-a)!} \\ \text{oder}\ \ (a-1)!\,(-a)! = \dfrac{\pi}{Sin\, a\pi}, \end{cases}$

wenn nur a beliebig reell ist *).

Setzt man in der XI. $a = \frac{1}{2}$, so geht hervor:

XII. $(-\frac{1}{2})!$ d. h. $1^{-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}$.

Weil aber (nach III. und V.)

$$(n-\tfrac{1}{2})! = 1^{n-\frac{1}{2}|1} = 1^{-\frac{1}{2}+n|1} = 1^{-\frac{1}{2}|1} \cdot (\tfrac{1}{2})^{n|1}$$

und (nach VI.) $(\frac{1}{2})^{n|1} = \dfrac{1^{n|2}}{2^n}$

ist, so folgt nun auch noch, wenn n beliebig reell ist,

XIII. $(n-\frac{1}{2})! = \dfrac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$ **);

und für $n = 1$,

XIII. a. $(\frac{1}{2})!$ d. h. $1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

---

*) Wollte man

$$(x-1)! = \Gamma_x \quad \text{so oft } x \text{ positiv ist,}$$

als bereits erwiesen voraussetzen (was wir jedoch hier nicht thun), so würden diese Gleichungen X. u. XI. sogleich wieder in (bekannte) Eigenschaften der Gamma-Funktionen übergehen, sobald man die Zeiger der letztern positiv voraussetzt. Die XI. sieht dann so aus:

$$\Gamma_a \cdot \Gamma_{1-a} = \frac{\pi}{Sin\, a\pi}.$$

Uebrigens geht aus der XI. die X. auch sogleich dadurch wieder hervor, daß man in der XI. zuerst b statt a schreibt und dann beide Gleichungen durch einander dividirt.

Aber auch die nun oben im Texte noch folgenden Formeln XII. — XVII. gehen in Eigenschaften der Gamma-Funktionen über, sobald man die Gleichung $(x-1)! = \Gamma_x$ als bekannt voraussetzt.

**) Dadurch ist $(n-\frac{1}{2})!$ in allen den Fällen vollständig ausgewerthet, in denen n positiv ganz ist, weil dann

$$1^{n|2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \quad \text{ist.} -$$

Wird in X. $a+\frac{1}{2}$ statt b gesetzt, so ergiebt sich:

$$\text{XIV.}\qquad Tg\,a\pi = \frac{(+a)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-a)^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{(-\frac{1}{2}+a)!\ (-\frac{1}{2}-a)!}{(-1+a)!\ \ (-a)!}\ (\text{V}.9),$$

wenn nur a beliebig reell ist.

Multiplicirt man die zweite Form der XI. mit a, so nimmt dieselbe Gleichung (nach V. 10.) folgende Gestalt an

$$\text{XV.}\qquad a!\,(-a)!\ \text{ d. h. }\ 1^{a|1}\cdot 1^{-a|1} = \frac{a\pi}{Sin\,a\pi}.$$

Und wird in XI. $a+\frac{1}{2}$ statt a gesetzt, so geht sie über in:

$$\text{XVI.}\quad (-\tfrac{1}{2}+a)!\,(-\tfrac{1}{2}-a)!\ \text{ d. h. }\ 1^{-\frac{1}{2}+a|1}\cdot 1^{-\frac{1}{2}-a|1} = \frac{\pi}{Cos\,a\pi},$$

wo stets a beliebig reell gedacht wird.

Wird ferner in der Gleichung XI. statt a nach und nach $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots \frac{n-1}{n}$ substituirt, und multiplicirt man dann die entstehenden Gleichungen alle mit einander, so kommt

$$\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)!\left(\frac{2}{n}-1\right)!\left(\frac{3}{n}-1\right)!\cdots\left(\frac{n-1}{n}-1\right)!\right]^2$$
$$= \frac{\pi^{n-1}}{Sin\frac{1}{n}\pi\cdot Sin\frac{2}{n}\pi\cdot Sin\frac{3}{n}\pi\cdots Sin\frac{n-1}{n}\pi}.$$

Weil aber hier der Nenner zur Rechten $=\frac{n}{2^{n-1}}$ ist *), so

---

*) Diesen Werth findet man sogleich, wenn man die durch $\frac{x^n-1}{x-1}$ gegebene ganze Funktion vom $(n-1)^{ten}$ Grade in ihre $n-1$ Faktoren zerlegt (welche alle durch

$$x-Cos\frac{2\mu}{n}\pi - i\cdot Sin\frac{2\mu}{n}\pi$$

ausgedrückt sind, wenn $\mu = 1, 2, 3, \cdots n-1$ genommen wird) und dann in dieser Gleichung $x=1$ setzt. Man erhält dann zur Linken die Zahl n, zur Rechten dagegen das Produkt der $n-1$ Faktoren

erhält man hieraus noch

$$\text{XVII.} \quad \left(\frac{1}{n}-1\right)!\left(\frac{2}{n}-1\right)!\left(\frac{3}{n}-1\right)!\cdots\left(\frac{n-1}{n}-1\right)! = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}} \; ^{*)},$$

wo jedoch n positiv ganz vorausgesetzt worden ist. —

Aus dieser Formel XVII. geht aber die XII. wieder als ein besonderer Fall hervor (für $n = 2$).

§. 106.

Als zweites Beispiel, an welchem erkannt werden kann, wie man von den elementarsten Wahrheiten ausgehen und sie unmittelbar in Eigenschaften unsrer Transcendenten, nämlich der gebrochenen Faktoriellen umformen kann, nehmen wir die Wahrheit, daß in dem Produkte

$$b(b+1)(b+2)(b+3)\cdots(b+2\nu-1)$$

von 2ν Faktoren, das Produkt aus dem 1ten, 3ten, 5ten, ... $(2\nu-1)^{ten}$ Faktor, eine Faktorielle mit der Differenz 2 bildet, daß man daher hat

$$1) \qquad b^{2\nu|1} = b^{\nu|2}\cdot(b+1)^{\nu|2},$$

$$1-Cos\frac{2\mu}{n}\pi - i\cdot Sin\frac{2\mu}{n}\pi$$

d. h.
$$2\cdot Sin\frac{\mu}{n}\pi\cdot\left(Sin\frac{\mu}{n}\pi - i\cdot Cos\frac{\mu}{n}\pi\right).$$

Nun ist aber das Produkt der $n-1$ eingeklammerten Faktoren $= 1$, weil das Produkt je zweier derselben (für $\mu = r$ und für $\mu = n-r$), die vom 1ten und letzten gleich weit abstehen, $= 1$ ist. Also fällt das Behauptete in die Augen.

*) Auch diese Gleichung enthält (weil später gefunden wird $\Gamma_x = (x-1)!$) eine schon von Euler hingestellte Eigenschaft der Gamma-Funktionen, nämlich

$$\Gamma_{\frac{1}{n}}\cdot\Gamma_{\frac{2}{n}}\cdot\Gamma_{\frac{3}{n}}\cdots\Gamma_{\frac{n-1}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}$$

und (für $n = 2$) $\qquad \Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$.

oder, wenn man nach dem Satze §. 102. VI. die Faktoriellen mit der Differenz 2, in solche mit der Differenz 1 umformt,

$$b^{2\nu|1} = \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu|1} \cdot 2^{\nu} \times \left(\frac{b+1}{2}\right)^{\nu|1} \cdot 2^{\nu},$$

oder, wenn man lieber 2a statt b schreibt,

$$2) \qquad \frac{(2a)^{2\nu|1}}{2^{2\nu} \cdot a^{\nu|1} \cdot (a+\frac{1}{2})^{\nu|1}} = 1,$$

so daß der Ausdruck links für jeden positiven ganzen Werth von ν, unabhängig ist von a.

Denkt man sich nun in dieser Gleichung $\nu = +\infty$ und ganz und statt der Faktoriellen

$$(2a)^{2\nu|1}, \qquad a^{\nu|1} \quad \text{und} \quad (a+\tfrac{1}{2})^{\nu|1}$$

aus §. 104. IX. bezüglich die Werthe

$$\frac{(2\nu)!}{(2a-1)!} \cdot (2\nu)^{2a-1}, \qquad \frac{\nu!}{(a-1)!} \cdot \nu^{a-1} \quad \text{und} \quad \frac{\nu!}{(a-\frac{1}{2})!} \cdot \nu^{a-\frac{1}{2}}$$

gesetzt, so geht die Gleichung 2.) augenblicklich (weil noch $(2\nu)! = 1^{2\nu|1} = 1^{\nu|2} \cdot 2^{\nu|2} = 1^{\nu|2} \cdot 2^{\nu} \cdot \nu!$ ist) über in

$$3) \qquad \frac{(a-1)!\,(a-\frac{1}{2})!\,2^{2a-1}}{(2a-1)!} = \frac{2^{\nu|2}}{1^{\nu|2} \cdot \nu^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

welche Gleichuug eine merkwürdige Eigenschaft der gebrochenen Faktoriellen ausspricht, nämlich: daß der Ausdruck links, von a ganz unabhängig ist und für jeden reellen Werth von a derselbe bleibt, wie er sich für irgend einen bestimmten Werth von a einmal gezeigt hat.

Weil aber derselbe Ausdruck, für $a = 1$, (wegen $0! = 1$, $1! = 1$, $(\frac{1}{2})! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (§. 105. XIII. a.) in $\sqrt{\pi}$ übergeht, so folgt nicht bloß daraus

$$4) \qquad \sqrt{\pi} = \frac{2^{\nu|2}}{1^{\nu|2} \cdot \nu^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

sondern auch nach

XVIII. $\qquad (a-1)!\,(a-\frac{1}{2})! = (2a-1)!\,2^{-2a+1} \cdot \sqrt{\pi},$

während a beliebig reell seyn kann*).

*) Quadrirt man die obige Gleichung 4.) und setzt man (nach V. 6.)

§. 107.

Drittes Beispiel. Ganz analoges erhält man, wenn man von einem Produkt von $n\nu$ äquidifferenten Faktoren ausgeht und darin den 1ten, $(n+1)^{ten}$, $(2n+1)^{ten}$ ... $[(\nu-1)n+1]^{ten}$ Faktor in eine Faktorielle zusammenfaßt, dann den 2ten, $(n+2)^{ten}$, $(2n+2)^{ten}$ ... $[(\nu-1)n+2]^{ten}$, wieder in eine, u. s. w. f. — Man findet dann genau wie im §. 106. N. 1. (für $n=2$) jetzt, sobald n wie ν positiv ganz vorausgesetzt werden,

$$1)\qquad b^{n\nu|1} = b^{\nu|n}\cdot(b+1)^{\nu|n}\cdot(b+2)^{\nu|n} \cdots (b+n-1)^{\nu|n}$$

oder, weil (nach §. 102. VI.) $(b+p)^{\nu|n} = \left(\frac{b+p}{n}\right)^{\nu|1}\cdot n^{\nu}$ ist,

$$b^{n\nu|1} = n^{n\nu}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^{\nu|1}\cdot\left(\frac{b+1}{n}\right)^{\nu|1}\cdot\left(\frac{b+2}{n}\right)^{\nu|1} \cdots \cdot \left(\frac{b+n-1}{n}\right)^{\nu|1}$$

d. h. wenn sogleich na statt b, also a statt $\frac{b}{n}$ gesetzt wird,

$$2)\qquad \frac{(na)^{n\nu|1}\cdot n^{-n\nu}}{a^{\nu|1}\cdot\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\nu|1} \cdots \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^{\nu|1}} = 1.$$

Setzt man nun wieder hier herein, indem man sich $\nu = +\infty$ denkt, statt der Faktoriellen $(na)^{n\nu|1}$, $a^{\nu|1}$, $\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\nu|1}$, 2c. 2c.

$1^{\nu|2} = 1\cdot 3^{\nu-1|2} = 3^{\nu-1|2}$, — dividirt man mit 2 und multiplicirt man den Nenner zur Rechten mit $\frac{2\nu+1}{2\nu} = 1$ für $\nu = \infty$, so ergiebt sich sogleich (weil noch (nach V. 6.) $3^{\nu-1|2}\cdot(2\nu+1) = 3^{\nu|2}$ ist)

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2^{\nu|2}\cdot 2^{\nu|2}}{1^{\nu|2}\cdot 3^{\nu|2}} \quad \text{für } \nu = \infty;$$

und dies ist der bekannte, zuerst von Wallis gegebene Ausdruck für π.

Und ist später $\Gamma_a = (a-1)!$ nachgewiesen, so geht die Gleichung XVIII. sogleich auch in eine Eigenschaft der Gamma-Funktionen über, wenn nur in letzteren die Zeiger positiv vorausgesetzt werden.

$\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^{\nu|1}$ die ihnen gleichen Ausdrücke aus §. 104. IX., so geht diese Gleichung 2.) augenblicklich über (weil

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\tfrac{1}{2}(n-1) \quad \text{wird) in}$$

$$3)\qquad n^{na-1}\cdot\frac{(a-1)!\left(a+\frac{1}{n}-1\right)!\cdots\left(a+\frac{n-1}{n}-1\right)!}{(na-1)!}$$
$$=\frac{(\nu!)^n\cdot n^{n\nu}}{(n\nu)!\;\nu^{\frac{1}{2}(n-1)}},$$

so daß der Ausdruck zur Linken, von a unabhängig ist und sein Werth für jeden Werth von a derselbe bleibt. — Nun ist aber derselbe Ausdruck für $a=\frac{1}{n}$ (nach §. 105. XVII.) $=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}$, (weil $0!=1$ ist); also geht die 3.) über in

$$\text{XIX.}\qquad (a-1)!\left(a+\frac{1}{n}-1\right)!\cdots\left(a+\frac{n-1}{n}-1\right)!$$
$$=(na-1)!\;(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cdot n^{-na+\frac{1}{2}},$$

welches eine neue Eigenschaft der gebrochenen Faktoriellen ist, in welcher jedoch die im vorigen §. 106. XVIII. ausgesprochene als ein besonderer Fall (für $n=2$) steckt *), sowie auch noch die XVII. $\left(\text{für } a=\frac{1}{n}\right)$.

Anmerkg. Was aber hier §§. 106. 107. nur Beispielsweise nachgewiesen worden ist, ergiebt sich noch viel einfacher, weil ganz von selbst, sobald man fortfährt, alle Eigenschaften der *ganzen* Faktoriellen (d. h. der Produkte äquidifferenter Faktoren) zu untersuchen, in wie weit sie auch für *gebrochene*, also überhaupt für reelle Faktoriellen noch gelten.

---

*) So wie *später* die Wahrheit, daß $\Gamma_a=(a-1)!$ ist, sobald a positiv gedacht wird, nachgewiesen ist, so geht auch diese Gleichung XIX. in eine (zuerst von *Legendre* auf dem Wege der Integralrechnung bemerkte) Eigenschaft der Gamma-Funktionen über.

§. 108.

So z. B. gelten die beiden Gleichungen zwischen ganzen Faktoriellen, von denen wir in den §§. 106. 107. ausgegangen sind, nämlich die Gleichungen

$$\text{XX.}\qquad b^{2c|1} = b^{c|2}\cdot(b+1)^{c|2} = 2^{2c}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^{c|1}\cdot\left(\frac{b+1}{2}\right)^{c|1}$$

und allgemeiner

$$\text{XXI.}\qquad b^{nc|1} = b^{c|n}\cdot(b+1)^{c|n}\cdot(b+2)^{c|n}\ \cdots\ (b+n-1)^{c|n}$$

$$= n^{nc}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^{c|1}\cdot\left(\frac{b+1}{n}\right)^{c|1}\cdot\left(\frac{b+2}{n}\right)^{c|1}\cdots\left(\frac{b+n-1}{n}\right)^{c|1}$$

auch noch, wenn c beliebig reell ist, so lange nur n positiv ganz bleibt.

Ist c wie n positiv ganz, so verstehen sich diese Gleichungen, sobald man noch §. 99. N. 8. zu Hilfe nimmt, ganz von selbst. — Im Allgemeinen aber, d. h. wenn c beliebig reell gedacht wird, ist doch immer (nach §. 101. I., wenn man daselbst 2ν statt ν und $r = 1$ setzt)

$$b^{2c|1} = \frac{b^{2\nu|1}}{(b+2c)^{2\nu|1}}\cdot(2\nu)^{2c} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty.$$

Eben so ist nach derselben Definition und wenn man noch Zähler und Nenner mit 2^ν multiplicirt (nach VI.)

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{c|1} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu|1}}{\left(\frac{b}{2}+c\right)^{\nu|1}}\cdot\nu^c = \frac{b^{\nu|2}}{(b+2c)^{\nu|2}}\cdot\nu^c$$

und

$$\left(\frac{b+1}{2}\right)^{c|1} = \frac{\left(\frac{b+1}{2}\right)^{\nu|1}}{\left(\frac{b+1}{2}+c\right)^{\nu|1}}\cdot\nu^c = \frac{(b+1)^{\nu|2}}{(b+1+2c)^{\nu|2}}\cdot\nu^c,$$

jedesmal für $\nu = +\infty$. Substituirt man nun diese Werthe in die XX., so geht sie über in:

$$\frac{b^{2\nu|1}}{(b+2c)^{2\nu|1}} = \frac{b^{\nu|2}\cdot(b+1)^{\nu|2}}{(b+2c)^{\nu|2}\cdot(b+2c+1)^{\nu|2}};$$

und da ν positiv ganz ist, so ist nach derselben Formel XX., die für positive ganze Werthe von c offenbar gilt, der Zähler dem Zähler und der Nenner dem Nenner gleich; also ist die Gleichung selbst eine richtige.

Eben so ist nach §. 101. I., wenn $'r = 1$ und $n\nu$ statt ν geschrieben wird,

$$b^{nc|1} = \frac{b^{n\nu|1}}{(b+nc)^{n\nu|1}}\cdot(n\nu)^{nc} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty;$$

und nach derselben Definition, für $r = 1$ und wenn man Zähler und Nenner mit n^ν noch multiplicirt,

$$\left(\frac{b}{n}\right)^{c|1} = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^{\nu|1}}{\left(\frac{b}{n}+c\right)^{\nu|1}}\cdot\nu^c = \frac{b^{\nu|n}}{(b+nc)^{\nu|n}}\cdot\nu^c,$$

$$\left(\frac{b+1}{n}\right)^{c|1} = \frac{(b+1)^{\nu|n}}{(b+nc+1)^{\nu|n}}\cdot\nu^c,$$

u. s. w.; zuletzt

$$\left(\frac{b+n-1}{n}\right)^{c|1} = \frac{(b+n-1)^{\nu|n}}{(b+nc+n-1)^{\nu|n}}\cdot\nu^c,$$

jedesmal für $\nu = +\infty$. Substituirt man aber diese Werthe zur Rechten statt der Faktoriellen zur Linken in die XXI., so geht letztere sogleich in eine offenbar richtige Gleichung über, da die Zähler links und rechts und die Nenner links und rechts (nach derselben Formel XXI., die für positive ganze Werthe von c offenbar gilt) einander gleich sind.

Uebrigens ist die XX. nur ein besonderer Fall der XXI. (für $n = 2$), und die Formeln XVIII. und XIX. sind nur die besonderen Fälle der XX. und XXI., in denen $b = 1$ und $c = a - \frac{1}{2}$ (in XX.) oder $c = a - \frac{1}{n}$ (in XXI.) gedacht wird, wie sogleich in die Augen fällt, wenn man nach dieser Substitution, statt der einzelnen Faktoriellen (nach §. 102. V. 9.) ihre Werthe in Fakultäten ausgedrückt, setzt, zuletzt aber noch die Formel XVII. (oder deren speciellen Fall XII.) in Anwendung bringt *).

*) Also finden auch später, — sobald die Wahrheit, daß $\Gamma_a = (a-1)!$ ist, (so lange a positiv) nachgewiesen seyn wird, — die zusammengesetztesten und merkwürdigsten, auf dem Wege der Integralrechnung zuerst bemerkten Eigenschaften der Gamma-Funktionen (d. h. der Euler'schen Integrale zweiter Klasse) ihre Quelle, in den, dem allerersten Anfänger in die Augen springenden Eigenschaften der Produkte äquidifferenter Faktoren.

Anmerkg. Multiplicirt man die Gleichung XXI. mit r^{nc}, indem man sich r positiv denkt, und setzt man noch b statt br, so erhält man die allgemeinere Gleichung

XXI^b. $b^{nc|r} = b^{c|nr} \cdot (b+r)^{c|nr} \cdot (b+2r)^{c|nr} \cdots (b+(n-1)r)^{c|nr}$;

und daß diese Gleichung auch gilt, wenn r negativ ist, oder wenn man $-r$ statt r schreibt und abermals r positiv sich denkt, — folgt sofort aus der Anwendung der IV. des §. 102., nach welcher

$$b^{nc|-r} = (b+r-ncr)^{nc|+r}, \qquad b^{c|-nr} = (b+nr-ncr)^{c|nr},$$
$$(b-r)^{c|-nr} = (b+(n-1)r-ncr)^{c|nr},$$
$$(b-2r)^{c|-nr} = (b+(n-2)r-ncr)^{c|nr},$$

u. s. w. f., zuletzt

$$(b-(n-1)r)^{c|-nr} = (b+r-ncr)^{c|nr}$$

ist. — Es muß aber n positiv ganz seyn, während b, c und r beliebig reell gedacht worden sind.

Betrachten wir übrigens jetzt noch den binomischen Lehrsatz *) für Faktoriellen, nämlich:

§. 109.

Der binomische Lehrsatz für Potenzen kann so geschrieben werden **):

---

*) Da die ganzen Faktoriellen (d. h. diejenigen, deren Exponenten ganze Zahlen sind) allemal in ganze Potenzen übergehen, so oft die Differenz der Faktorielle Null wird, so enthalten die Eigenschaften der ganzen Faktoriellen auch allemal die der ganzen Potenzen in sich. — Es fragt sich daher stets umgekehrt: Welche Gesetze der Potenzen lassen sich auf Faktoriellen ausdehnen, und wie? —

**) Wir setzen stets voraus, daß die kleinen deutschen Buchstaben nie andere Werthe vorstellen als 0 und ganze positive Zahlen. — Unter dieser Voraussetzung drückt die Gleichung $a+b = \mu$ aus, daß der größeste Werth von b die positive ganze Zahl μ ist, weil für $b>\mu$, a negativ werden würde, was nie seyn soll (S. d. Vorrede).

1) $(a+b)^n = S[n_\mathfrak{b} \cdot a^{n-\mathfrak{b}} b^\mathfrak{b}] = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} a^{n-\mathfrak{b}} b^\mathfrak{b}\right]$,

wo $\mathfrak{b}$ nach und nach 0 und alle positiven ganzen Zahlen, — wo S die Summe aller dadurch hervorgehenden Glieder vorstellt, und wo n_0, n_1, n_2, n_3, ꝛc. ꝛc. die Binomial-Koeffizienten bedeuten, so daß

2) $n_\mathfrak{b} = \frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} = \frac{(n+1-\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}|+1}}{\mathfrak{b}!}$ (§. 102. IV.)

ist. — Dabei kann n beliebig gedacht werden. — Dagegen schreibt sich der binomische Lehrsatz für ganze Faktoriellen so:

(⊙)… $(a+b)^{n|r} = S[n_\mathfrak{b} \cdot a^{n-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}]$,

sobald nur n eine positive ganze Zahl ist, so daß die Summe zur Rechten aus n+1 Gliedern besteht (weil die Binomial-Koeffizienten n_{n+1}, n_{n+2}, n_{n+3}, ꝛc. ꝛc. den Faktor 0 (Null) in sich aufnehmen und daher alle, bis ins Unendliche fort der Null gleich werden) *).

*) Für diesen Fall, wo n positiv ganz gedacht ist, erhält man diese Gleichung (⊙) unmittelbar aus dem Satze:

1) $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a \cdot (1+x)^b$,

wenn in selbigem statt der Potenzen die Binomialreihen gesetzt werden, so daß diese Gleichung 1.) übergeht in

2) $S[(a+b)_\mathfrak{c} \cdot x^\mathfrak{c}] = S[a_\mathfrak{a} \cdot x^\mathfrak{a}] \times S[b_\mathfrak{b} \cdot x^\mathfrak{b}]$,

während die Multiplikation zur Rechten noch liefert

3) $S[(a+b)_\mathfrak{c} \cdot x^\mathfrak{c}] = S[a_\mathfrak{a} \cdot b_\mathfrak{b} \cdot x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}]$,

wenn nur überall die kleinen deutschen Buchstaben Null und alle positiven ganzen Zahlen vorstellen.

Da nun die Reihen links und rechts identisch sind, so müssen links und rechts die Koeffizienten von x^n dieselben seyn, d. h. es muß seyn

4) $(a+b)_n = S\left[\begin{matrix} a_\mathfrak{a} \cdot b_\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n \end{matrix}\right]$ d. h. $\frac{(a+b)^{n|-1}}{n!} = S\left[\begin{matrix} \frac{a^{\mathfrak{a}|-1} \cdot b^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n \end{matrix}\right]$

§. 110.

So wie n nicht positiv ganz ist, so hat die Reihe zur Rechten in ⊙ des §. 109., zwei Ausnahmen abgerechnet, unendlich-

---

wo a und b Null und alle ganzen (positiven) Zahlen vorstellen, welche der Bedingung $a+b=n$ genügen.

Dies ist eine bekannte Vergleichung zwischen Binomial-Koeffizienten. Weil aber $\frac{n!}{a!\,b!} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} = \frac{n^{b|-1}}{b!}$ ist, so erhält man hieraus sogleich, wenn man diese Gleichung 4.) noch mit $n!$ multiplicirt,

$$5)\qquad (a+b)^{n|-1} = S[n_b \cdot a^{n-b|-1} \cdot b^{b|-1}],$$

welches der binomische Lehrsatz für Faktoriellen mit positivem ganzem Exponenten n und mit der Differenz -1 ist. — Multiplicirt man aber diese Gleichung mit $(-r)^n = (-r)^{n-b} \cdot (-r)^b$ und wendet man (da b, n und $n-b$ positiv ganz sind) die Formel VI. des §. 102. d. h. §. 99. N. 8. an, so ergiebt sich sogleich die obige Formel (⊙), sobald man noch $-ra$ und $-rb$ durch a und b ersetzt.

Stellt man die Formel ⊙ als einen Lehrsatz hin, so kann man ihn synthetisch auf dem Wege der vollkommenen Induktion beweisen, indem man zeigt, daß er allemal für $n=h+1$ wahr seyn muß, so oft er für $n=h$ zutrifft, zuletzt aber untersucht, ob er für $n=2$ eine richtige Gleichung liefert. (Diesen Beweis findet man im „Versuch eines vollk. conseq. Systems der Mathem. II. Th 2te Auflage).

Kramp findet diesen Lehrsatz mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Er setzt

$$(☾)\cdots\qquad (a+b)^{n|r} = a^{n|r} + C_1 \cdot a^{n-1|r} b^{1|r} + C_2 \cdot a^{n-2|r} \cdot b^{2|r} + C_3 \cdot a^{n-3|r} \cdot b^{3|r} + \cdots$$

und bestimmt nun die Koeffizienten C_1, C_2, C_3, 2c. 2c. dadurch, daß er in diese Gleichung (☾) nach und nach $-r$, $-2r$, $-3r$, 2c. 2c. statt b setzt, und die erhaltenen Gleichungen von einander subtrahirt, die 1te von der 2ten, die 2te von der 3ten u. s. w. f., um dann die entstehenden Gleichungen auf dieselbe Weise von einander zu subtrahiren, — und so weiter fort. Jede erste Gleichung in jedem dieser Systeme von Gleichungen bestimmt dann einen der unbestimmten Koeffizienten, und so zeigen sich diese als die Binomial-Koeffizienten, wie sie bei der Entwickelung der Potenz $(a+b)^n$ vorkommen.

viele Glieder, und es fragt sich nun, ob die Summe dieser unendlichen Reihe noch immer $= (a+b)^{n|r}$ ist? — Zuvörderst erinnere man sich, daß $a^{c|r}$ als eine reelle Zahl definirt worden (also nicht ein Form-Ausdruck ist); deshalb kann von der Summe der gedachten unendlichen Reihe nur in dem Falle die Rede seyn, in welchem sie convergirt (S. Geist der Diff. u. Integral-Rechnung. Erlangen 1846. Einl. pag. 23.)

Stellen wir uns also die

Aufgabe:

Die unendliche Reihe

$$(R)\cdots \qquad S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}],$$

welche durch R bezeichnet seyn mag, in dem Falle zu summiren, in welchem sie convergent ist.

Es ist (nach §. 102. V. und V. 5.)

$$1) \qquad a^{n-b|r} = a^{n|r} \cdot (a+nr)^{-b|r} = \frac{a^{n|r}}{(a+(n-1)r)^{b|-r}}$$
$$= \frac{a^{n|r}}{(-1)^b \cdot [-a-(n-1)r]^{b|r}},$$

so wie

Kramp hält seine Entwicklung für allgemein gültig, während die Methode der unbestimmten Koeffizienten, wie wir schon in den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik" 1823 zu bemerken die Gelegenheit hatten, doch nur Resultate liefern kann, die nur in dem Umfange gelten, als die vorausgesetzte Form der Entwickelung gerechtfertigt ist. — In der That zeigen die folgenden Paragraphen, daß für eine positive Differenz r der Werth der Faktoriellen-Binomial-Reihe

$$S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}], = (a+b)^{n|r} \cdot \frac{Sin\frac{a}{r}\pi \cdot Sin\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}+n\right)\pi}{Sin\left(\frac{a}{r}+n\right)\pi \cdot Sin\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}\right)\pi},$$

also nur dann $= (a+b)^{n|r}$ ist, wenn entweder n oder $\frac{b}{r}$ positiv oder negativ ganz ist, während überdies dieselbe Reihe, so oft sie unendlich ist, auch convergent seyn muß, welches noch $r-a-b$ zugleich mit r positiv voraussetzt.

2) $$n_{\mathfrak{b}} = \frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} = \frac{(-1)^{\mathfrak{b}} \cdot (-n)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!}$$

alles nach §. 102. VI.

Deshalb hat man sogleich:

3) $$R = a^{n|r} \cdot S\left[\frac{(-n)^{\mathfrak{b}|1} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}|r}}{\mathfrak{b}!\, [-a-(n-1)r]^{\mathfrak{b}|r}}\right],$$

oder, wenn man in jedem Gliede zur Rechten, Zähler und Nenner durch $r^{\mathfrak{b}}$ dividirt, dabei §. 102. VI. anwendet*), und $(-n) = \alpha$, $\frac{\mathfrak{b}}{r} = \beta$, so wie $-\frac{a}{r}-(n-1) = \gamma$ setzt:

4) $$R = a^{n|r} \cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot \beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right].$$

Nun ist aber die unendliche Reihe, womit die Faktorielle $a^{n|r}$ hier zur Rechten multiplicirt erscheint, genau die von Gauß in der von uns im §. 29. angeführten Abhandlung so gründlich behandelte. Aus diesem §. 29. folgert nun

„daß sie nur dann, dann aber allemal convergent ist, „wenn $\gamma-\alpha-\beta$, d. h. $1-\frac{a+b}{r}$ d. h. $\frac{r-a-b}{r}$ positiv ist, d. h. wenn $r-a-b$ mit der Differenz r zugleich positiv oder zugleich negativ ist."

Was aber die Summe dieser unendlichen Reihe betrifft, im Falle eine solche existirt, d. h. im Falle die Reihe convergent ist, so wird solche auf nachstehendem Wege gefunden**):

---

*) Hier überall durfte die Formel §. 102. VI. deshalb unbeschränkt in Anwendung kommen, weil der Exponent $\mathfrak{b}$ der Faktoren $(-1)^{\mathfrak{b}}$, $r^{\mathfrak{b}}$, mit denen man multiplicirt oder dividirt, positiv ganz oder Null ist.

**) Bemerkt man, daß, wenn diese Reihe durch F_{γ} bezeichnet wird, die Summe aller ihrer Glieder dem allerersten Gliede derselben, d. h. der 1, desto mehr sich nähert, je größer γ gegen α und β gedacht wird, daß also

$$F_{\gamma+\nu} = 1 \quad \text{wird für} \quad \nu = \infty,$$

so wird die ganze Summation davon abhängen, daß man F_{γ} in $F_{\gamma+1}$

Man multiplicirt diese Reihe mit $\gamma-\alpha-1$, indem man die Glieder derselben mit $\gamma+\mathfrak{b}-1$ und mit $-(\alpha+\mathfrak{b})$ durchmultiplicirt und die Resultate zusammenfaßt, dabei aber noch §. 102. V. 6. anwendet und man erhält:

$$5)\qquad \frac{\gamma-\alpha-1}{\gamma-1}\cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right] = S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot(\beta-1)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{b}|1}}\right] \text{*)}$$

---

ausdrückt, weil dann auch F_γ sich in $F_{\gamma+\nu}$ ausdrücken läßt. — Darauf muß also oben im Texte hin gearbeitet werden.

*) Es ist nämlich das Resultat der Multiplikation mit $\gamma+\mathfrak{b}-1$,

$$= S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}-1|1}}\right] = (\gamma-1)\cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{b}|1}}\right] \dots (U).$$

Dagegen ist das Resultat der andern Multiplikation (mit $\alpha+\mathfrak{b}$)

$$= S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}+1|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right],$$

oder, wenn man noch ein allererstes Glied hinzufügt, welches $=0$ ist, und deshalb zuerst Zähler und Nenner mit $\mathfrak{b}+1$ multiplicirt, dann aber $\mathfrak{b}-1$ statt $\mathfrak{b}$ schreibt,

$$= S\left[\frac{\mathfrak{b}\cdot\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}-1|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}-1|1}}\right] = (\gamma-1)\cdot S\left[\frac{\mathfrak{b}\cdot\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}-1|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{b}|1}}\right] \dots (V).$$

Die Differenz $U-V$ wird daher nun

$$= (\gamma-1)\cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{b}-1|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{b}|1}}\cdot(\beta+\mathfrak{b}-1-\mathfrak{b})\right]$$

und dies ist der Ausdruck in 5.) zur Rechten.

Wir haben die Rechnung hierher gesetzt, um zu gleicher Zeit darauf aufmerksam machen zu können, daß, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ positiv, gleichzeitig aber $\gamma-\alpha-\beta-1$ nicht mehr positiv ist, zwar unsre zu summirende unendliche Reihe convergent ist, dagegen die beiden Reihen U und V beide divergent seyn werden, so daß (in diesem Falle) das Resultat in 5.) zur Rechten die Differenz zweier divergenten unendlichen Reihen seyn wird.

Es wird daher zur größeren Strenge der Rechnung nöthig seyn, wie in der Vorrede geschildert, zu verfahren, nämlich

1) unter deutschen kleinen Buchstaben nur 0 und alle positiven ganzen Zahlen zu verstehen;

Auf ganz analogem Wege findet man aber noch

$$6) \quad \frac{\gamma-\beta-1}{\gamma-2} \cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot (\beta-1)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{b}|1}}\right] = S\left[\frac{(\alpha-1)^{\mathfrak{b}|1}(\beta-1)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-2)^{\mathfrak{b}|1}}\right] \text{*)}$$

Multiplicirt man daher die 5.) mit $\frac{\gamma-\beta-1}{\gamma-2}$, so erhält man mittelst der 6.) sogleich:

$$7) \quad \frac{(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\beta-1)}{(\gamma-1)(\gamma-2)} \cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot \beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right] = S\left[\frac{(\alpha-1)^{\mathfrak{b}|1} \cdot (\beta-1)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ (\gamma-2)^{\mathfrak{b}|1}}\right].$$

Ferner findet sich, wenn man dieselbe unendliche Reihe in 4.) zur Rechten mit $\beta-1$ multiplicirt,

$$8) \quad \frac{\beta-1}{\gamma-1} \cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot \beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right] = S\left[\frac{\mathfrak{b} \cdot (\alpha-1)^{\mathfrak{b}|1} \cdot (\beta-1)^{\mathfrak{b}|1}}{(\alpha-1) \cdot \mathfrak{b}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{b}|1}}\right] \text{**)}.$$

Subtrahirt man nun die 8.) von der 5.), und bedenkt man, daß (nach §. 102. V. 6.)

---

2) den durch $S[\mathfrak{f}_\mathfrak{b}]$ vorgestellten Reihen noch die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu$ unterzusetzen, um dadurch zu bewirken, daß nicht $\mathfrak{b} > \mu$ genommen werden kann, wodurch die Reihe keine unendliche mehr ist, sondern nur $\mu+1$ Glieder hat, unter μ irgend eine positive ganze Zahl verstanden.

Die ganze oben beschriebene Rechnung bleibt dann genau dieselbe, nur daß den beiden Seiten in 5.) noch die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu$ untersteht, welche nicht $\mathfrak{b} > \mu$ werden läßt, und daß rechts noch das letzte $(\mu+1)^{te}$ Glied von V (für $\mathfrak{b} = \mu+1$), nämlich $-\frac{\alpha^{\mu+1|1} \cdot \beta^{\mu|1}}{\mu!\ \gamma^{\mu|1}}$ hinzutritt, weil die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu$ dadurch, daß man $\mathfrak{b}-1$ statt $\mathfrak{b}$ schrieb, in $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu+1$ überging, so daß auch noch $\mathfrak{b} = \mu+1$ werden kann. Für $\mu = \infty$ verschwindet aber dieses letztere Glied, sobald $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist. Also ist die Gleichung 5.) richtig.

*) Die 6.) folgt unmittelbar aus der 5.), wenn man in letzterer $\gamma-1$ statt γ, ferner $\beta-1$ statt α, endlich α statt β schreibt.

**) Denn in der Reihe zur Rechten ist das allererste Glied (für $\mathfrak{b} = 0$) der Null gleich, während die übrigen Glieder mit denen zur Linken bis in's Unendliche fort übereinstimmen, wie man sogleich sieht, sobald man (rechts) $\mathfrak{b}+1$ statt $\mathfrak{b}$ schreibt.

$$\alpha^{\mathfrak{d}|1} = \frac{(\alpha-1)^{\mathfrak{d}|1}\cdot(\alpha+\mathfrak{d}-1)}{\alpha-1}$$

ist, so ergiebt sich

9) $$\frac{\gamma-\alpha-\beta}{\gamma-1}\cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{d}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{d}|1}}{\mathfrak{d}!\ \gamma^{\mathfrak{d}|1}}\right] = S\left[\frac{(\alpha-1)^{\mathfrak{d}|1}(\beta-1)^{\mathfrak{d}|1}}{\mathfrak{d}!\ (\gamma-1)^{\mathfrak{d}|1}}\right].$$

Setzt man nun in 7.) $\gamma+1$ statt γ, und vergleicht man das Resultat mit der 9.), so hat man

10) $$S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{d}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{d}|1}}{\mathfrak{d}!\ \gamma^{\mathfrak{d}|1}}\right] = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma\cdot(\gamma-\alpha-\beta)}\cdot S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{d}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{d}|1}}{\mathfrak{d}!\ (\gamma+1)^{\mathfrak{d}|1}}\right],$$

wo die Reihe zur Rechten von der zur Linken sich nur dadurch unterscheidet, daß rechts $\gamma+1$ steht, wo links γ. — Dies ist also die gesuchte Reduktionsformel. — Sie kann so geschrieben werden

11) $$F_\gamma = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma\cdot(\gamma-\alpha-\beta)}\cdot F_{\gamma+1},$$

sobald unsre zu summirende Reihe in 4.) zur Rechten, der Kürze wegen durch F_γ bezeichnet wird.

Setzt man nun in dieser Gleichung nach und nach $\gamma+1$, $\gamma+2$, $\gamma+3$, ... $\gamma+\nu-1$ statt γ, und multiplicirt man die entstehenden Gleichungen alle mit einander, so giebt dies:

12) $$F_\gamma = \frac{(\gamma-\alpha)^{\nu|1}\cdot(\gamma-\beta)^{\nu|1}}{\gamma^{\nu|1}\cdot(\gamma-\alpha-\beta)^{\nu|1}}\cdot F_{\gamma+\nu}.$$

Denkt man sich nun ν unendlich-groß, so werden alle Glieder der Reihe $F_{\gamma+\nu}$ unendlich-klein, bezüglich der 1ten, 2ten, 2c. 2c. Ordnung, deren Summe allemal selbst unendlich-klein ist, — bis auf das allererste Glied derselben, welches $=1$ ist. — Also geht die 12.) über in

13) $$S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{d}|1}\cdot\beta^{\mathfrak{d}|1}}{\mathfrak{d}!\ \gamma^{\mathfrak{d}|1}}\right] = \frac{(\gamma-\alpha)^{\nu|1}\cdot(\gamma-\beta)^{\nu|1}}{\gamma^{\nu|1}\cdot(\gamma-\alpha-\beta)^{\nu|1}} \quad \text{für } \nu=+\infty.$$

Verfährt man aber jetzt nach Anleitung des §. 104., um die ganzen Faktoriellen in gebrochene umzuformen, so geht die 13.) ohne Weiteres noch über in

14) $$S\left[\frac{\alpha^{\mathfrak{b}|1} \cdot \beta^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!\ \gamma^{\mathfrak{b}|1}}\right] = \frac{(\gamma-\alpha)^{\alpha|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\alpha|1}} = \frac{(\gamma-\beta)^{\beta|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\beta|1}}$$

auch (nach §. 102. V. 8.) $= \dfrac{(\gamma-1)!\ (\gamma-\alpha-\beta-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!\ (\gamma-\beta-1)!}$ *),

wodurch die Summe der fraglichen unendlichen Reihe in (gebrochenen oder ganzen) Faktoriellen, so wie auch in Fakultäten ausgedrückt sich sieht.

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung 4.) und zu gleicher Zeit

statt	α,	β,	γ,
ihre Werthe	$-n$,	$\frac{b}{r}$,	$-\frac{a}{r}-(n-1)$,

---

*) Das letztere Resultat hat auch Gauß in der angeführten Abhandlung für die Summe seiner Reihe gefunden, jedoch in seinen Zeichen, nämlich so:
$$\frac{\Pi_{\gamma-1} \cdot \Pi_{\gamma-1-\alpha-\beta}}{\Pi_{\gamma-1-\alpha} \cdot \Pi_{\gamma-1-\beta}}.$$

Wollte man übrigens, — in so ferne später gefunden wird, daß man $(a-1)! = \Gamma_a$ nur dann hat, wenn a positiv ist, — dasselbe Resultat auch noch so schreiben, nämlich
$$\frac{\Gamma_\gamma \cdot \Gamma_{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma_{\gamma-\alpha} \cdot \Gamma_{\gamma-\beta}}$$
so würde dies eine Beschränkung des gewonnenen Resultats seyn, weil, so lange wir unter Γ_x das bestimmte Integral $\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{x-1} \cdot dz$ verstehen, die Zeiger γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ nur positiv vorausgesetzt werden dürfen.

Euler (im IIten Bande seiner Integral-Rechnung) findet auf dem Wege der Integralrechnung einen Summen-Ausdruck für die unendliche Reihe
$$S\left[\frac{h^{\mathfrak{b}|m} \cdot h_1^{\mathfrak{b}|m_1}}{(k+n)^{\mathfrak{b}|n} \cdot (k_1+n_1)^{\mathfrak{b}|n_1}} \cdot x^{\mathfrak{b}}\right],$$
welche für $x = m = m_1 = n = n_1 = 1$ und $h = \alpha$, $h_1 = \beta$, $k = 0$ und $k_1 = \gamma-1$ in die Reihe F_γ übergeht.

Die Vergleichung der Resultate giebt zu sehr interessanten Betrachtungen Veranlassung, die wir jedoch hier bei Seite lassen müssen.

so ergiebt sich zuletzt die Summe unserer Binomialreihe, nämlich R d. h.

$$\text{XXII.}\quad S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}] = a^{n|r} \cdot \frac{\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-n|1}}{\left(1-\frac{a+b}{r}\right)^{-n|1}}$$

$$= a^{n|r} \cdot \frac{\left(1-n-\frac{a+b}{r}\right)^{b:r|1}}{\left(1-\frac{a+b}{r}\right)^{b:r|1}}$$

$$= a^{n|r} \cdot \frac{\left(-\frac{a}{r}-n\right)!\,\left(-\frac{a+b}{r}\right)!}{\left(-\frac{a}{r}\right)!\,\left(-\frac{a+b}{r}-n\right)!}$$

(nach §. 102. V. 9.), wenn nur diese Reihe (zur Linken) convergent (oder endlich) ist, d. h. wenn nur $r-a-b$ mit der Differenz r der Faktoriellen, zu gleicher Zeit positiv oder zu gleicher Zeit negativ ist. — Ist dieselbe unendliche Reihe nicht convergent, d. h. haben $r-a-b$ und r verschiedene Vorzeichen, so ist natürlich von ihrem Werthe nicht mehr die Rede, denn sie selber ist dann in der Rechnung nicht weiter zulässig.

§. 111.

Um diese gefundenen Werthausdrücke zur Rechten der Gleichung XXII. umzuformen, muß man jetzt zwei Fälle von einander unterscheiden.

A. Ist nämlich r negativ, also $-r$ positiv, so kann man Zähler und Nenner in XXII. zur Rechten entweder mit $(-r)^{-n}$ oder mit $(-r)^{b:r}$ multipliciren und dabei die Formel §. 102. VI. anwenden, und man erhält dann sogleich

$$1)\quad S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}] = a^{n|r} \cdot \frac{(a-r)^{-n|-r}}{(a+b-r)^{-n|-r}} = (a+b)^{n|r},$$

weil (nach §. 102. V. 5.) $(a-r)^{-n|-r} = \dfrac{1}{a^{n|r}}$

und $$(a+b-r)^{-n|-r} = \frac{1}{(a+b)^{n|r}}$$

ist. — In diesem Falle, d. h. wenn r negativ ist, und wenn, der Convergenz wegen, auch r—a—b negativ ist, gilt also der binomische Lehrsatz für Faktoriellen noch immer genau so, wie er im §. 109. ⊙ zu sehen ist.

Es leuchtet ein, daß dasselbe Verfahren auch die Gültigkeit desselben Satzes für eine positive Differenz r außer Zweifel setzen würde, sobald man in der Formel §. 102. VI. die negative Zahl —r statt h setzen dürfte. — Weil dies aber nicht geschehen darf, so muß man noch den Fall

B. wenn r positiv ist, besonders betrachten. Multiplicirt man jetzt Zähler und Nenner des Ausdrucks zur Rechten in XXII. mit r^{-n} oder mit $r^{b:r}$, und wendet man wiederum die Formel §. 102. VI. an, so erhält man

2) $S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}]$

$$= a^{n|r} \cdot \frac{(r-a)^{-n|r}}{(r-a-b)^{-n|r}} = a^{n|r} \cdot \frac{(r-a-b-nr)^{n|r}}{(r-a-nr)^{n|r}}$$

$$= a^{n|r} \cdot \frac{(-a-nr)^{-n|-r}}{(-a-b-nr)^{-n|-r}} = a^{n|r} \cdot \frac{(-a-b)^{n|-r}}{(-a)^{n|-r}}$$

(vgl. §.103.)

$$= a^{n|r} \cdot \frac{(r-nr-a-b)^{b:r|r}}{(r-a-b)^{b:r|r}} = a^{n|r} \cdot \frac{(-a-b)^{-b:r|-r}}{(-a-b-nr)^{-b:r|-r}}$$

$$= a^{n|r} \cdot \frac{(r-a)^{-b:r|r}}{(r-a-nr)^{-b:r|r}} = a^{n|r} \cdot \frac{(-a-nr)^{b:r|-r}}{(-a)^{b:r|-r}}.$$

Kann man nun hier (in 2.) zur Rechten, Zähler und Nenner mit $(-1)^{\pm n}$ oder $(-1)^{\pm b:r}$ multipliciren, dabei aber den Satz §. 102. VI. in Anwendung bringen, so geht sogleich wieder die Form §. 109. ⊙ hervor. — Weil aber die Anwendung des Satzes §. 102. VI. dasmal nur erlaubt ist (in so fern —1 statt des dortigen h gesetzt werden muß), wenn $\pm n$ oder wenn $\pm b:r$ ganz ist, also entweder wenn n, oder wenn $\frac{b}{r}$ eine positive oder negative ganze Zahl ist, so gilt der binomische Lehr-

satz §. 109. ⊙ für Faktoriellen mit der positiven Differenz r nur dann, wenn entweder n oder $\frac{b}{r}$ positiv oder negativ ganz und die Reihe (im Falle sie eine unendliche) convergent ist.

In allen übrigen Fällen, in denen r positiv und die Reihe convergent (also r—a—b mit r zugleich positiv) ist, läßt sich der für die Binomialreihe R in XXII. gefundene Ausdruck nie in $(a+b)^{n|r}$ umformen, so daß in allen diesen eben genannten Fällen der Werth der Binomialreihe R, von $(a+b)^{n|r}$ verschieden bleibt, also der sogenannte binomische Lehrsatz für Faktoriellen, wie er §. 109. ⊙ zu sehen ist, nicht mehr gilt.

Dagegen bleibt die in XXII. gefundene Summe der Binomialreihe R in allen Fällen wahr, sowohl für Faktoriellen mit positiver, wie für solche mit negativer Differenz.

§. 112.

Ist aber r positiv, so kann man den 4ten Ausdruck der Summe der Binomialreihe in N. 2. des §. 111., nämlich

$$a^{n|r} \cdot \frac{(-a-b)^{n|-r}}{(-a)^{n|-r}}$$

nicht bloß so schreiben

$$(a+b)^{n|r} \cdot \frac{a^{n|r}}{(a+b)^{n|r}} \cdot \frac{(-a-b)^{n|-r}}{(-a)^{n|-r}},$$

sondern man kann auch in diesen letzteren Brüchen Zähler und Nenner durch r^n dividiren und §. 102. VI. anwenden, und man erhält dann

$$S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}] = (a+b)^{n|r} \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{n|1}}{\left(\frac{a+b}{r}\right)^{n|1}} \cdot \frac{\left(-\frac{a+b}{r}\right)^{n|-1}}{\left(-\frac{a}{r}\right)^{n|-1}}$$

$$= (a+b)^{n|r} \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{n|+1}}{\left(-\frac{a}{r}\right)^{n|-1}} \cdot \frac{\left(-\frac{a+b}{r}\right)^{n|-1}}{\left(\frac{a+b}{r}\right)^{n|+1}}$$

und dies ist nach §. 105. X. wiederum

$$= (a+b)^{n|r} \cdot \frac{Sin\frac{a}{r}\pi \cdot Sin\left(\frac{a+b}{r}+n\right)\pi}{Sin\left(\frac{a}{r}+n\right)\pi \cdot Sin\frac{a+b}{r}\pi}.$$

§. 113.

Man hat also (aus XXII.) gefunden, wenn r negativ (und auch $r-a-b$ negativ) ist:

XXIII. $S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}] = (a+b)^{n|r}$;

aber, wenn r positiv (und auch $r-a-b$ positiv) ist:

XXIV. $S[n_b \cdot a^{n-b|r} \cdot b^{b|r}]$

$$= (a+b)^{n|r} \cdot \frac{Sin\frac{a}{r}\pi \cdot Sin\left(\frac{a+b}{r}+n\right)\pi}{Sin\left(\frac{a}{r}+n\right)\pi \cdot Sin\frac{a+b}{r}\pi},$$

welcher letztere Ausdruck in zwei Fällen wiederum $= (a+b)^{n|r}$ ist, nämlich wenn n, und dann noch wenn $\frac{b}{r}$ positiv oder negativ ganz ist.

Für $r = -1$ und $r = +1$ gehen diese Gleichungen XXIII. und XXIV. über in

XXV. $S[n_b \cdot a^{n-b|-1} \cdot b^{b|-1}] = (a+b)^{n|-1}$

wenn $a+b+1$ positiv ist; und in

XXVI. $S[n_b \cdot a^{n-b|+1} b^{b|+1}]$

$$= (a+b)^{n|+1} \cdot \frac{Sin\, a\pi \cdot Sin\, (a+b+n)\pi}{Sin\, (a+n)\pi \cdot Sin\, (a+b)\pi}$$

wenn $1-a-b$ positiv ist, damit die Reihen convergent sind; und dieser letztere Ausdruck reducirt sich wieder auf $(a+b)^{n|1}$, so oft n oder b (positiv oder negativ) ganz ist.*)

*) Kramp hielt die Gleichung XXIII. für allgemein gültig. Dieser Irrthum ist durch die Gleichung XXIV. außer allem Zweifel gesetzt.

Es braucht kaum gesagt zu werden, daß aus den Formeln XXV. und XXVI. die obern, allgemeiner erscheinenden Formeln XXIII. und XXIV. augenblicklich wieder hervorgehen, wenn man solche links und rechts mit $r^{n-b} \cdot r^b = r^n$ multiplicirt, dabei r positiv voraussetzt, die Formel §. 102. VI. anwendet, zuletzt aber $\frac{a}{r}$ und $\frac{b}{r}$ statt bezüglich a und b schreibt. — Es sind also die letztern beiden Formeln eben so allgemein als die erstern beiden.

Alle 4 letztern Formeln sind aber unmittelbare Ergebnisse der in der Formel §. 110. N. 14. enthaltenen Summation, nämlich der Gleichung:

$$\text{XXVII.}\quad S\left[\frac{\alpha^{b|1} \cdot \beta^{b|1}}{b!\ \gamma^{b|1}}\right] = \frac{(\gamma-\alpha)^{\alpha|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\alpha|1}} = \frac{(\gamma-\beta)^{\beta|1}}{(\gamma-\alpha-\beta)^{\beta|1}} = \frac{(\gamma-1)!\ (\gamma-1-\alpha-\beta)!}{(\gamma-1-\alpha)!\ (\gamma-1-\beta)!},\ ^{*)}$$

*) Diese Summation XXVII. hat Gauß zuerst gelehrt (in der angeführten Abhandlung vom Jahre 1812.); die Summation XXIV. oder XXVI. glauben wir selbst zum ersten Male mitgetheilt zu haben (S. Crelle's Journal vom Jahre 1848.). — Gauß bedient sich dieser Summation XXVII., um in der bekannten Gleichung

$$Sin\,nt = n \cdot Sin\,t \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{(n+1-2a)^{2a|2}}{(2a+1)!}(Sin\,t)^{2a}\right]$$

die Reihe rechts für den Fall zu summiren, wo $t = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird; und er erhält dann, indem er noch $n = 2z$ setzt

$$z!\ (-z)! = \frac{z\pi}{Sin\,z\pi} \quad \text{und daraus} \quad (-\tfrac{1}{2}+z)!\ (-\tfrac{1}{2}-z)! = \frac{\pi}{Cos\,z\pi}.$$

Indem er nun statt der Faktoriellen deren Werthe (nach §. 101. III.) in Produkte unendlich-vieler Faktoren ausgedrückt, setzt, erhält er $Sin\,z\pi$ und $Cos\,z\pi$ in die bekannten Produkte unendlich-vieler Faktoren zerlegt.

Wir haben hier (im §. 105.) dieselben Formeln (XV. XVI. daselbst) nämlich

$$a!\ (-a)! = \frac{a\pi}{Sin\,a\pi} \quad \text{und} \quad (-\tfrac{1}{2}+a)!\ (-\tfrac{1}{2}-a)! = \frac{\pi}{Cos\,a\pi}$$

entwickelt, indem wir von dem Produkte unendlich-vieler Faktoren, in welche

so lange nur $\gamma-\alpha-\beta$ positiv d. h. die Reihe selbst convergent ist.

Dividirt man die Gleichungen XXV. und XXVI. bezüglich durch $a^{n|-1}$ und $a^{n|1}$, so erhält man

$$\text{XXVIII.}\qquad \frac{(a+b)^{n|-1}}{a^{n|-1}} = S\left[\frac{(-n)^{b|1}(-b)^{b|1}}{b!\,(a-n+1)^{b|1}}\right]$$

wenn nur $a+b+1$ positiv ist; — und

$$\text{XXIX.}\qquad \frac{(a+b)^{n|1}}{a^{n|1}} = S\left[\frac{(-n)^{b|1}\cdot b^{b|1}}{b!\,(1-a-n)^{b|1}}\right] \times \frac{Sin(a+n)\pi\cdot Sin(a+b)\pi}{Sin\,a\pi\cdot Sin(a+b+n)\pi},$$

wenn $1-a-b$ positiv ist.

Da das Verhältniß (der Quotient) zweier Faktoriellen mit gemeinschaftlichem Exponenten und mit der Differenz 1, allemal dem Verhältniß zweier Sinus gleich ist, so oft die Summe aus den beiden Basen und dem gemeinschaftlichen Exponenten, $=1$ ist (nach §. 105. X.), so folgt aus XXVII. für $\gamma=\frac{1+\alpha+\beta}{2}$,

$$\text{XXX.}\qquad S\left[\frac{\alpha^{b|1}\cdot\beta^{b|1}}{b!\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)^{b|1}}\right] = \frac{Cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\pi}{Cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\pi},$$

so lange nur, damit die Reihe zur Linken eine convergente ist, $1-\alpha-\beta$ positiv gedacht wird.

Setzt man hier herein $\frac{1}{2}$ statt α, und $2\alpha-\frac{1}{2}$ statt β, so ergiebt sich noch (mit Zuziehung der §. 102. VI.)

$$\text{XXXI.}\qquad S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\cdot\frac{(4\alpha-1)^{b|2}}{(2\alpha+1)^{b|2}}\right] = Tg\,\alpha\pi,$$

wenn nur, damit die Reihe convergire, $\frac{1}{2}-\alpha$ positiv ist, also für jeden Werth von α, der zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\infty$

---

sich $Sin\,a\pi$ zerlegen läßt, ausgingen, weil letztere Zerlegung ein ganz elementares Geschäft und auf dem elementaren Wege völlig naturgemäß, und danach auch viel allgemeiner wahr ist, als jede andere bisher bekannt gewordene Zerlegung erkennen läßt.

liegt und welcher kein Glied der Reihe auf die Form 1 bringt. Für $\alpha = \frac{1}{2} - \beta$ geht solche Gleichung über in

$$\text{XXXII.} \quad S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{(1-4\beta)^{b|2}}{(2-2\beta)^{b|2}}\right] = Cotg\,\beta\pi, \text{*)}$$

wo β jeden positiven Werth haben kann, weil die unendliche Reihe zur Linken dann noch stets convergirt.

Anmerkg. Ohne diese Reihen hier weiter zu verfolgen werden wir in den nächsten Paragraphen einige Anwendungen der Lehre der Faktoriellen und namentlich der Summation der (Faktoriellen-) Binomialreihe auf die Auswerthung bestimmter Integrale nachweisen. Zuvor müssen wir aber noch einige andere Betrachtungen anstellen.

Die Summation XXVII. und die vorangehenden Summationen erfordern nämlich zu ihrer völligen Erledigung die numerische Berechnung der Faktorielle $a^{c|r}$, während a, c und r beliebig reell sind. Wollte man nun diese letztere etwa dadurch bewerkstelligen, daß man $a^{c|r}$ in eine (convergente) unendliche Reihe ausdrückte, die nach Potenzen von r fortläuft, so müßte man vor allen Dingen ausmitteln, ob diese Reihe bloß positive oder auch negative Potenzen von r in sich aufnehmen wird. — Ist der Exponent c positiv ganz, so giebt

$$a^{c|r} = a(a+r)(a+2r) \cdots (a+(c-1)r)$$

offenbar eine endliche Reihe, die nach ganzen positiven

---

*) Setzt man $\frac{m}{2n}$ statt β und denkt man sich m und n positiv ganz, so liefert diese Gleichung

$$Cotg\,\frac{m}{2n}\pi = S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{(n-2m)^{b|2n}}{(2n-m)^{b|2n}}\right]$$

d. h.

$$Cotg\,\frac{m}{2n}\pi = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{n-2m}{2n-m} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(n-2m)(3n-2m)}{(2n-m)(4n-m)}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{(n-2m)(3n-2m)(5n-2m)}{(2n-m)(4n-m)(6n-m)} + \text{in inf.}$$

Potenzen von r fortläuft. Wie sieht es aber aus, wenn c gebrochen ist, oder negativ? —

Es würde aber $a^{c|r}$ für einen dieser letztbezeichneten Werthe von c offenbar in die gedachte Entwickelung (im Falle eine solche überhaupt existirt) negative Potenzen von r mit aufnehmen, wenn $a^{c|r}$ für $r = 0$ die Form $\frac{1}{0}$ annähme. — Im §. 99. N. 16. haben wir jedoch gesehen, daß $a^{c|r}$ für $r = 0$ in a^c übergeht, so oft c positiv oder negativ ganz oder Null ist. Es fragt sich daher nun

ob auch für einen gebrochenen Werth von c, noch $a^{c|0} = a^c$ ist? —

Ferner haben wir im §. 100. N. 17. bewiesen, daß

$$\frac{(b+\nu)^{c|\pm1}}{\nu^c} = 1 \quad \text{ist für} \quad \nu = \infty,$$

so oft b beliebig reell und endlich vorausgesetzt wird, wenn nur c positiv oder negativ ganz oder Null ist. — Bei der Beantwortung der vorliegenden Frage stößt man nun auf diese andere:

welchen Werth derselbe Quotient $\frac{(b+\nu)^{c|\pm1}}{\nu^c}$ annehmen wird für $\nu = \infty$, unter der Voraussetzung, daß c nicht mehr ganz, sondern (positiv oder negativ) gebrochen ist? —

Diese Versuche, auch die NN. 16. u. 17. der §§. 99. u. 100. zu verallgemeinern, führen nun zu den nachstehenden §§. 114. und 115.

§. 114.

Es ist allemal

$$\text{XXXIII.} \qquad \frac{(b+\nu)^{c|\pm1}}{\nu^c} \doteq 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

wenn b und c beliebig reell gedacht werden und die Potenz ν^c ihren positiven Werth vorstellt; dieselbe Gleichung gilt

noch für $\nu = -\infty$, so oft c positiv oder negativ ganz oder Null ist, aber nicht mehr nothwendig (für $\nu = -\infty$), wenn c positiv oder negativ gebrochen ist.

Denn es folgt aus §. 102. V.

$$b^{c|1} = \frac{b^{\nu|1}}{(b+c)^{\nu|1}} \cdot (b+\nu)^{c|1},$$

wenn b und c und ν beliebig reell sind; — dagegen ist nach der Definition I. des §. 101.

$$b^{c|1} = \frac{b^{\nu|1}}{(b+c)^{\nu|1}} \cdot \nu^{c} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty$$

wenn nur b beliebig reell zwar, aber endlich gedacht wird. Dividirt man nun diese beiden Gleichungen durch einander, so ergiebt sich die Richtigkeit der zu erweisenden Formel XXXIII. für die Differenz +1.

Es ist aber ferner (nach §. 102. V.)

$$b^{c|-1} = \frac{b^{-\nu|-1}}{(b-c)^{-\nu|-1}} \cdot (b+\nu)^{c|-1},$$

wenn b und c und ν beliebig reell sind; dagegen ist nach der Definition §. 101. II.

$$b^{c|-1} = \frac{b^{-\nu|-1}}{(b-c)^{-\nu|-1}} \cdot \nu^{c} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty.$$

Durch Division dieser letztern beiden Formeln ergiebt sich aber wieder die XXXIII. für die Differenz −1.

Daß endlich die Formel XXXIII. nicht allemal gilt für $\nu = -\infty$, erhellt, sobald man beispielsweise $c = \frac{1}{2}$ setzt, für welchen Werth von c der Zähler reell, der Nenner dagegen imaginär wird.

Diese Gleichung XXXIII. liefert noch, wenn man die Faktorielle mit der Differenz +1 nimmt und solche (nach §. 102. V. 9.) in Fakultäten verwandelt:

XXXIV. $$\frac{(b+c+\nu-1)!}{\nu^{c} \cdot (b+\nu-1)!} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty,$$

wie auch b und c beliebig reell gegeben seyn mögen, wenn nur b endlich bleibt. — Für $b = 0$ giebt dies noch

XXXIV^b. $$\frac{(c+\nu-1)!}{\nu^c \cdot (\nu-1)!} = 1 \quad \text{für} \quad \nu = +\infty. \text{*)}$$

§. 115.

Es ist allemal

XXXV. $$a^{c|\pm 0} = a^c,$$

wenn nur a beliebig zwar, aber positiv vorausgesetzt wird und c beliebig reell, und wenn ± 0 soviel als $\pm\frac{1}{\infty}$ bedeutet.

Denn es ist nach §. 102. VI., sobald r positiv ist, allemal

$$a^{c|\pm r} = r^c \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{c|\pm 1},$$

wenn die Potenz r^c ihren positiven Werth vorstellt; also ist auch, wenn man $\frac{a}{\nu}$ statt r schreibt:

$$a^{c|\pm\frac{a}{\nu}} = \left(\frac{a}{\nu}\right)^c \cdot \nu^{c|\pm 1},$$

wenn $\frac{a}{\nu}$ positiv ist und $\left(\frac{a}{\nu}\right)^c$ ihren positiven Werth vorstellt. — Wird nun $\frac{a}{\nu} = +\frac{1}{\infty} = +0$ gesetzt, so hat man $\nu = +\infty$, so lange a positiv, und dann geht die vorstehende Gleichung über in

$$a^{c|\pm 0} = a^c \cdot \frac{\nu^{c|\pm 1}}{\nu^c} \quad \text{für} \quad \nu = +\infty;$$

folglich sieht sich vermöge der Gleichung XXXIII. des §. 114. unser Lehrsatz erwiesen.

Daraus folgt nun aber auch noch

XXXV^b. $$\frac{a^{c|r}}{a^c} = 1 \quad \text{für} \quad a = +\infty;$$

d. h. der Werth des Quotienten $\frac{a^{c|r}}{a^c}$ nähert sich der Einheit

*) Auch diese Gleichung ist eine merkwürdige Eigenschaft der Gamma-Funktion, wie wir später sehen werden.

desto mehr, je größer a (und positiv) gedacht wird, und kommt der Einheit unendlich nahe, wenn a positiv und unendlich-groß gedacht wird. — Dies gilt, während c und r beliebig reell sind.

Denn es ist, da a positiv (nach §. 102. VI.)

$$a^{c|r} = a^c \cdot 1^{c|r:a}.$$

Da nun (nach XXXV.) für $a = \infty$, $1^{c|r:a} = 1^{c|\pm 0} = 1^c = 1$ wird, so ist die Behauptung außer Zweifel gestellt. *)

Anmerkg. Die numerische Auswerthung der reellen Fakultäten und Faktoriellen werden wir in dem nächsten Kapitel mittheilen.

Zuvor noch einige Anwendungen.

§. 116.

Euler hat sich mit zwei bestimmten Integralen viel beschäftigt, welche Legendre unter dem Namen der Euler'schen Integrale erster und zweiter Klasse auf's Neue behandelt hat.

Das Euler'sche Integral erster Klasse

$$\int_0^1 z^{m-1}(1-z^n)^{p-1} \cdot dz$$

kann dadurch, daß man $z^n = x$ setzt, auf das einfachste derselben, nämlich auf

$$1) \qquad \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \cdot dx = \Phi_{a,b}, \text{ **)}$$

---

*) Die Beschränkungen, unter denen die Sätze dieser letzteren beiden Paragraphen gelten, sind früher nicht gekannt gewesen, und aus diesem Mangel konnte für die Lehre der Faktoriellen nur Unsicherheit und Unrichtigkeit der Resultate hervorgehen.

**) Setzt man $x = \frac{z}{1+z}$ und, wenn $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ gedacht wird, statt der Grenze 1 lieber $1-\varepsilon$, was erlaubt ist, so geht das Integral

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \cdot dx$$

(nach §. 97.) sogleich in dieses andere, nämlich in

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \cdot dx$$

wo a und b beliebig positiv gedacht werden (damit das Integral nicht zu den Unterbrochenen gehöre, sondern wirklich einen Werth habe), zurückgeführt werden; es wird nämlich

$$\int_0^1 z^{m-1}(1-z^n)^{p-1}\cdot dx = \frac{1}{n}\,\Phi_{\frac{m}{n},p}.$$

Wir nennen dieses Integral (1.) die Phi-Funktion.

Das Euler'sche Integral zweiter Klasse ist das jetzt gewöhnlich durch Γ_c bezeichnete

2) $$\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{c-1}\cdot dz = \Gamma_c = \int_{+0}^1 \left(Log\frac{1}{x}\right)^{c-1}\cdot dx\ *)$$

und Gamma-Funktion genannte, in welchem c beliebig positiv gedacht werden muß, damit das Integral zur Linken nicht divergent, oder das zur Rechten nicht unterbrochen sey, so daß jedes der beiden Integrale wirklich einen Werth hat.

Wir wollen nun zunächst den Werth der Phi-Funktion

$\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}\cdot dx$ d. h. $\Phi_{a,b}$ finden.

Weil wir aber die Differenzial-Funktion mittelst des binomischen Lehrsatzes [nämlich $(1-x)^{b-1}$] in eine unendliche Reihe verwandeln und dann allgemein integriren wollen, so ist es bequemer, erst einmal a statt a—1 und b statt b—1 zu setzen und zu finden den Werth des bestimmten Integrals

$\int_0^1 x^a(1-x)^b\cdot dx$, welches, damit es nicht zu den unterbrochenen gehöre, a und b zwischen —1 und +∞ voraussetzt.

Nach dem binomischen Lehrsatze für Potenzen hat man

1) $$(1-x)^b = S\left[\frac{b^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right] = S\left[\frac{(-b)^{\mathfrak{b}|1}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right].$$

über, so daß man auch dieses letztere Integral als durch $\Phi_{a,0}$ bezeichnet ansehen kann.

*) Das erstere Integral geht in das andere sogleich über (nach §. 97.), wenn man $e^z = \frac{1}{x}$ setzt.

Multiplicirt man daher mit x^a und integrirt man dann sogleich jedes Glied zur Rechten zwischen den Grenzen 0 und 1, so erhält man augenblicklich:

$$2)\qquad \int_0^1 x^a \cdot (1-x)^b \cdot dx = S\left[\frac{(-b)^{b|1}}{b!} \cdot \frac{1}{a+b+1}\right].$$

Weil aber der Nenner $a+b+1$ der letzte Faktor von

$$(a+1)^{b+1|1} = (a+1)^{b|1} \cdot (a+b+1) = (a+1) \cdot (a+2)^{b|1}$$

(§. 102. V. 6.) ist, so darf man nur Zähler und Nenner mit $(a+1)^{b|1}$ multipliciren, und der Ausdruck zur Rechten in 2.) geht sogleich über in

$$\frac{1}{a+1} \cdot S\left[\frac{(-b)^{b|1} \cdot (a+1)^{b|1}}{b!\ \ (a+2)^{b|1}}\right].$$

Wird nun diese Reihe (nach §. 113. XXVII.) summirt, so giebt sie augenblicklich, sobald, wie wir auch oben vorausgesetzt haben, $1+b$ positiv ist, damit die Reihe convergirt,

$$3)\qquad \int_0^1 x^a \cdot (1-x)^b \cdot dx = \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1^{a+1|1}}{(1+b)^{a+1|1}} = \frac{a!}{(1+b)^{a+1|1}} = \frac{a!\ b!}{(a+b+1)!}$$

(nach §. 102. V. 6. u. V. 9.); oder, wenn man $a-1$ statt a, und $b-1$ statt b schreibt, so daß die Werthe der neuen a und b positiv seyn müssen,

$$\text{XXXVI.}\qquad \Phi_{a,b} \text{ d. h. } \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \cdot dx = \frac{(a-1)!\ (b-1)!}{(a+b-1)!},$$

so lange nur (jetzt) a und b *beliebig positiv* sind.

Anmerkg. Uebrigens sieht man aus dem gefundenen Ausdruck, daß das Integral $\Phi_{a,b}$ seinen Werth nicht ändert, wenn man auch a und b mit einander vertauscht, was jedoch auch vorher in die Augen fällt, sobald man im Integral $x = 1-z$ setzt (§. 97.).

§. 117.

Soll das Euler'sche Integral zweiter Klasse, nämlich das bestimmte Integral

1) Γ_c d. h. $\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{c-1} \cdot dz$ *)

ausgewerthet werden, so kann man diese Aufgabe auf die vorige zurückführen, sobald man daran denkt, daß

2) $e^{-z} = \left(1 - \frac{z}{k}\right)^k$ ist für $k = \infty$,

(weil beide Seiten dieser Gleichung, wenigstens für jeden endlichen Werth von z einerlei Logarithmen geben) — daß daher

3) $$\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{c-1} \cdot dz = \int_0^k \left(1 - \frac{z}{k}\right)^k \cdot z^{c-1} \cdot dz$$

seyn wird, sobald man $k = +\infty$ sich denkt. Weil aber in der Gleichung 3.) auf der linken Seite, z nicht immer endlich bleibt, sondern zuletzt auch unendlich-große Werthe annimmt, so muß die Gleichung 3.) vor allen Dingen erst strenge erwiesen werden, und dies geschieht wie folgt:

Es ist zunächst (nach §. 88.)

4) $$\int_0^k \left(1 - \frac{z}{k}\right)^k \cdot z^{c-1} \cdot dz$$
$$= \int_0^g \left(1 - \frac{z}{k}\right)^k \cdot z^{c-1} \cdot dz + \int_g^k \left(1 - \frac{z}{k}\right)^k \cdot z^{c-1} \cdot dz,$$

wo $g < k$ gedacht wird und mit k zugleich positiv.

Der Werth des zweiten dieser Integrale zur Rechten liegt nun (nach §. 89.) zwischen

---

*) Setzt man $e^{-z} = y$, so verwandelt sich dieses bestimmte Integral sogleich in dieses andere

$$\int_0^1 \left(L \frac{1}{y}\right)^{c-1} \cdot dy,$$

so daß unter Γ_c dieses letztere ebenfalls verstanden wird.

$$g^{c-1}\cdot\left(1-\frac{g}{k}\right)^k\cdot(k-g) \quad \text{und} \quad k^{c-1}\cdot\left(1-\frac{k}{k}\right)^k\cdot(k-g)$$

während der letztere Ausdruck $= 0$ ist. — Also ist

5) $$\int_g^k z^{c-1}\cdot\left(1-\frac{z}{k}\right)^k\cdot dz < g^{c-1}\cdot\left(1-\frac{g}{k}\right)^k\cdot(k-g).$$

Ferner ist nach dem Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 7.), wenn nur $\frac{z}{k}<1$ ist,

6) $$Log\left(1-\frac{z}{k}\right)^k = k\left(-\frac{z}{k}-\theta\cdot\frac{z^2}{k^2}\right) = -z-\theta\cdot\frac{z^2}{k},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt; folglich (wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht) hat man:

7) $$\left(1-\frac{z}{k}\right)^k = e^{-z}\cdot e^{-\theta\cdot\frac{z^2}{k}}, \text{ für } z<k, \text{ also auch für } z=g<k.$$

Dies, in Verbindung mit der Gleichung 5.) giebt

8) $$\int_g^k z^{c-1}\cdot\left(1-\frac{z}{k}\right)^k\cdot dz < g^{c-1}\cdot e^{-g}\cdot e^{-\theta\cdot\frac{g^2}{k}}\cdot(k-g),$$

in so ferne $g<k$ gedacht worden ist. — Setzt man nun $k = \alpha g^2$, wo α positiv, >1 und entweder endlich oder unendlich-groß gedacht wird, so daß auch noch $\frac{g^2}{k} = \frac{1}{\alpha} < 1$ ist, — so wird dieser letztere Ausdruck zur Rechten

$$= (\alpha g-1)\cdot g^c\cdot e^{-g}\cdot e^{-\theta:\alpha};$$

und dieser Ausdruck wird für $g = \infty$ (wodurch auch $k>g = \infty$ wird) unendlich-klein; mithin ist das zweite Integral zur Rechten in 4.) für $g = \infty$ und $k = \alpha g^2 > g$, unendlich-klein.

Das erstere Integral zur Rechten in 4.) ist dagegen (nach 7.) $= \int_0^g z^{c-1}\cdot e^{-z}\cdot e^{-\theta(z^2:k)}\cdot dz$, also auch (nach §. 89.) $= M\cdot\int_0^g z^{c-1}\cdot e^{-z}\cdot dz = M\cdot\Gamma_c$ (wegen $g = \infty$), wenn M einen Werth vorstellt, der zwischen e^0 (oder 1) und $e^{-\theta:\alpha}$

liegt. Weil aber α beliebig groß genommen werden kann, so kann man sich α so groß denken, daß $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{1}{\infty}$ wird; also liegt M offenbar zwischen 1 und $1+\frac{1}{\infty}$, d. h. es ist $M = 1$. — Also ist der Ausdruck zur Linken in 4.) dem durch Γ_c bezeichneten bestimmten Integrale genau gleich, wodurch die Gleichung 3.) strenge erwiesen ist.

Setzt man nun in dieser Gleichung 3.) $z = kx$, so erhält man sogleich

9) $$\Gamma_c = k^c \cdot \int_0^1 (1-x)^k \cdot x^{c-1} \cdot dx \quad \text{für} \quad k = \infty;$$

d. h. (nach §. 116. XXXVI.) wenn man ν statt k schreibt,

10) $$\Gamma_c = \nu^c \cdot \frac{\nu!\,(c-1)!}{(\nu+c)!} \quad \text{für} \quad \nu = \infty,$$

oder, weil (nach §. 114. XXXIV^b., wenn man daselbst $b = 1$ setzt)

$$\frac{\nu^c \cdot \nu!}{(\nu+c)!} = 1 \quad \text{ist für} \quad \nu = \infty,$$

XXXVII. $$\Gamma_c = (c-1)! = 1^{c-1|1} = (c-1)^{c-1|-1},$$

wenn nur c beliebig positiv ist, übrigens ganz oder gebrochen.

Anmerkg. Vergleicht man die XXXVI. und XXXVII. mit einander, so ergiebt sich noch die merkwürdige Relation zwischen beiden bestimmten Integralen, nämlich

XXXVIII. $$\Phi_{a,b} = \frac{\Gamma_a \cdot \Gamma_b}{\Gamma_{a+b}},$$

wenn nur a und b beliebig positiv sind.

Wenn übrigens (nach XXXVII.) Γ_c nichts weiter als eine Fakultät $(c-1)!$ und (nach XXXVI.) $\Phi_{a,b}$ ein aus Fakultäten zusammengesetzter Ausdruck ist, so folgt von selbst:

1) daß die von Euler und Legendre auf dem Wege der Integral-Rechnung gefundenen Eigenschaften der Gamma-Funktionen nichts anders seyn können, als die Eigen-

schaften der Fakultäten, also der Faktoriellen, also auch der Produkte äquidifferenter Faktoren, d. h. Eigenschaften, welche jeder Anfänger aus der Betrachtung der letzteren Produkte abstrahiren kann;

2) daß die von Euler und Legendre auf dem Wege der Integralrechnung aufgefundenen Eigenschaften der Euler-schen Integrale erster Klasse, also auch der Phi-Funktionen, ebenfalls ihren nächsten Grund in den Eigenschaften der Fakultäten, also der Faktoriellen haben, und aus der Betrachtung der letztern am einfachsten und naturgemäßesten hervorgehen (S. das 5te Kapitel im nächsten IXten Theile dieses Werkes).

Neuntes Kapitel.

Vom Integral-Logarithmen.

§. 118.

Es sey noch auszuwerthen das bestimmte Integral

$$1)\qquad \int_a^b \frac{e^x}{x}\cdot dx \qquad \text{oder} \qquad \int_\alpha^\beta \frac{1}{Lz}\cdot dz,$$

in welches letztere das erstere Integral übergeht, sobald $e^x = z$, also $x = \log z$ gesetzt, und $\alpha = e^a$ und $\beta = e^b$ gedacht wird.

Setzt man statt e^x die bekannte unendliche Reihe, so hat man

$$2)\qquad \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots;$$

und daraus findet sich ohne Weiteres (nach §. 86.)

$$3)\qquad \int_a^b \frac{e^x}{x} = L\frac{b}{a} + \left\{\begin{array}{l} b + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{2!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{3!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{b^4}{4!} + \cdots \\ -a - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2!} - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{3!} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a^4}{4!} - \cdots \end{array}\right\},$$

wo beide Grenzen a und b positiv, oder beide negativ vorausgesetzt werden müssen, damit das Integral selbst nicht zu den unterbrochenen, d. h. zu denen gehöre, welche überhaupt gar keinen Werth haben.

Setzt man in der 3.) $b = 1$ und $a = \frac{1}{n}$, und setzt man

4) $$1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{3!}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{4!}+\cdots$$
$$= 1{,}317902151311\cdots = K,$$

so findet sich noch

5) $$\int_{1:n}^{1}\frac{e^x}{x}\cdot dx = K + Ln - \left(\frac{1}{n}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!\,n^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{3!\,n^3}+\cdots\right);$$

und diese Gleichung läßt sehen, daß der Werth des Integrals positiv und immer größer und zuletzt unendlich-groß ist, wenn die untere Grenze $\frac{1}{n}$ immer kleiner und zuletzt unendlich-klein wird.

Wird in 3.) $e^x = z$, $e^a = \alpha$ und $e^b = \beta$ gesetzt, so geht diese Gleichung über in

6) $$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{Lz}\cdot dz = L\frac{L\beta}{L\alpha} + \left\{\begin{array}{l} L\beta+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(L\beta)^2}{2!}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(L\beta)^3}{3!}+\cdots \\ -L\alpha-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(L\alpha)^2}{2!}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(L\alpha)^3}{3!}-\cdots\end{array}\right\},$$

in welcher Gleichung beide Grenzen α und β stets positiv und beide kleiner als 1, oder beide größer als 1 seyn müssen, weil sonst das Integral zu den unterbrochenen gehört. — Sind beide Grenzen <1, so kann die eine derselben α auch unendlich-klein werden, d. h. $\alpha = +0$. Diesen Fall, d. h. das Integral $\int_{+0}^{\beta}\frac{1}{Lz}\cdot dz$ hat man den Integral-Logarithmen genannt, durch $li\beta$ bezeichnet und besonderen Betrachtungen unterworfen, wobei jedoch $\beta<1$ und positiv vorausgesetzt werden muß.

Da bei dem Integral-Logarithmen $li\beta$, die obere Grenze $\beta<1$ vorausgesetzt wird, so ist $L\beta$ negativ so wie auch $L\alpha = L(+0)$ negativ ist. Damit daher rechts nicht unbequeme Formen entstehen, wird man in der Gleichung 6.) statt

$\frac{L\beta}{L\alpha}$ lieber $\frac{-L\beta}{-L\alpha}$ und dann statt $L\frac{L\beta}{L\alpha}$ lieber $L(-L\beta)-L(-L\alpha)$ schreiben, und dieselbe Gleichung 6.) wird dann die Form annehmen

$$7)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{1}{Lz}\cdot dz = \left\{\begin{array}{l} L(-L\beta)+L\beta+\frac{1}{2}\cdot\frac{(L\beta)^2}{2!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(L\beta)^3}{3!}+\cdots \\ -L(-L\alpha)-L\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{(L\alpha)^2}{2!}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(L\alpha)^3}{3!}-\cdots \end{array}\right\},$$

wo α und β beliebig positiv aber beide kleiner als 1 gedacht sind. —

Soll nun der Ausdruck links in den Integral-Logarithmen übergehen, so muß man $\alpha = +0$ setzen; die zweite Reihe zur Rechten geht dann in einen bestimmten Ziffernwerth über, den wir durch A bezeichnen und die Konstante des Integral-Logarithmen nennen wollen, so daß man hat

$$8)\qquad A = -\left[L(-L\alpha)+L\alpha+\tfrac{1}{2}\frac{(L\alpha)^2}{2!}+\tfrac{1}{3}\frac{(L\alpha)^3}{3!}+\cdots\right]$$

für $\alpha = +0$,

und

$$9)\qquad li\beta \text{ d. h. } \int_{+0}^\beta \frac{1}{Lz}\cdot dz = A+L(-L\beta)+L\beta+\tfrac{1}{2}\frac{(L\beta)^2}{2!}+\tfrac{1}{3}\frac{(L\beta)^3}{3!}+\cdots.$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Konstante A des Integral-Logarithmen näherungsweise zu bestimmen.

§. 119.

Nach Mascheroni (Adnotationes ad Calculum integralem Euleri) kann man aber, um diese Konstante zu finden, wie folgt verfahren:

Man setze $\beta = 1-\omega$, so hat man

$$L\beta = -(\omega+\tfrac{1}{2}\omega^2+\tfrac{1}{3}\omega^3+\tfrac{1}{4}\omega^4+\cdots)$$

und

$$L(-L\beta) = L\omega + L(1+\tfrac{1}{2}\omega+\tfrac{1}{3}\omega^2+\tfrac{1}{4}\omega^3+\cdots);$$

dann substituire man diese Werthe in die Gleichung 7.), indem man gleichzeitig $\alpha = +0$ setzt und den Ausdruck zur Rechten (mit Ausnahme des Gliedes $L\omega$) nach Potenzen von ω entwickelt; dies giebt die Form der Entwicklung für $li(1-\omega)$, nämlich

$$10)\qquad \int_{+0}^{1-\omega} \frac{1}{Lz}\cdot dz = L\omega + A + b_1\omega + b_2\omega^2 + b_3\omega^3 + \cdots,$$

wo A noch die in N. 8. definirte Konstante ist und wo b_1, b_2, b_3, 2c. 2c. von ω unabhängige Koeffizienten sind.

Auf der andern Seite hat man, wenn $z = 1-y$ gesetzt wird,

$$11)\qquad \int_{+0}^{1-\omega} \frac{1}{Lz}\cdot dz = \int_{\omega}^{1} \frac{1}{L(1-y)}\cdot dy$$

und

$$12)\qquad \frac{1}{L(1-y)} = \frac{-1}{y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\cdots}.$$

$$= \frac{k}{y} + k_0 + k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3 + \cdots,$$

wo k, k_0, k_1, k_2, k_3, 2c. 2c. leicht zu findende Koeffizienten sind; denn da die letztere Reihe mit $y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\cdots$ multiplicirt, für jeden Werth von y allemal -1 geben muß, so giebt dies die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&k = -1\\
&k_0+\tfrac{1}{2}k = 0\\
&k_1+\tfrac{1}{2}k_0+\tfrac{1}{3}k = 0\\
&k_2+\tfrac{1}{2}k_1+\tfrac{1}{3}k_0+\tfrac{1}{4}k = 0\\
&k_3+\tfrac{1}{2}k_2+\tfrac{1}{3}k_1+\tfrac{1}{4}k_0+\tfrac{1}{5}k = 0\\
&\quad\text{u. s. w. f.}
\end{aligned}\right\}\ \text{d. h.}\ \left\{\begin{aligned}
&k = -1,\\
&k_0 = +\tfrac{1}{2},\\
&k_1 = +\tfrac{1}{12},\\
&k_2 = +\tfrac{1}{24},\\
&k_3 = +\tfrac{19}{720},\\
&\quad\text{u. s. w. f. *)}
\end{aligned}\right.$$

*) Betrachtet man von diesen Gleichungen zwei nächst auf einander folgende, nämlich die n^{te} und die $(n+1)^{te}$, d. h.

$$1)\qquad k_{n-2}+\tfrac{1}{2}k_{n-3}+\tfrac{1}{3}k_{n-4}+\cdots+\frac{1}{n-1}k_0+\frac{1}{n}k = 0$$

und

Sind nun diese Koeffizienten k, k_0, k_1, k_2, k_3, ꝛc. ꝛc. ausgewerthet, so integrirt man die Gleichung 12.) nach y zwischen den Grenzen $y=\omega$ und $y=1$, und man erhält:

---

2) $k_{n-1}+\frac{1}{2}k_{n-2}+\frac{1}{3}k_{n-3}+\frac{1}{4}k_{n-4}+\cdots+\frac{1}{n}k_0+\frac{1}{n+1}k=0,$

so giebt die erstere, wenn -1 statt k gesetzt wird,

$$\frac{1}{n}=k_{n-2}+\frac{1}{2}k_{n-3}+\frac{1}{3}k_{n-4}+\cdots+\frac{1}{n-1}k_0;$$

folglich, wenn man mit $\frac{n}{n+1}$ multiplicirt,

$$\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot\left(k_{n-2}+\frac{1}{2}k_{n-3}+\frac{1}{3}k_{n-4}+\cdots+\frac{1}{n-1}k_0\right).$$

Substituirt man diesen Werth rechts statt $\frac{1}{n+1}$, so wie -1 statt k, in die andere Gleichung 2.), so findet sich

$$k_{n-1}=\left(\frac{n}{n+1}-\frac{1}{2}\right)\cdot k_{n-2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{1}{3}\right)\cdot k_{n-3}+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{1}{4}\right)\cdot k_{n-4}+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\cdot k_0.$$

Diese Gleichung giebt, wenn man 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc. statt n setzt, alle Werthe k_1, k_2, k_3, ꝛc. ꝛc. in $k_0=+\frac{1}{2}$ ausgedrückt, und läßt sehen, daß letztere alle positiv werden müssen. Weil aber die andere Gleichung (2.), wenn statt k sein Werth -1 gesetzt wird, auch noch

$$k_{n-1}=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{2}k_{n-2}+\frac{1}{3}k_{n-3}+\frac{1}{4}k_{n-4}+\cdots+\frac{1}{n}k_0\right)$$

giebt, so folgt noch, daß

$$k_{n-1}<\frac{1}{n+1}$$

ist, woraus hervorgeht, daß k_{n-1} für sehr große n, sehr klein, und für einen unendlich-großen Werth von n, unendlich-klein wird.

Diese Betrachtung ist nothwendig, um einzusehen, daß die für $\frac{1}{L(1-\omega)}$ gefundene Reihe

$$\frac{k}{\omega}+k_0+k_1\omega+k_2\omega^2+k_3\omega^3+\cdots$$

für $\omega<1$ convergent ist. —

13) $\int_{+0}^{1-\omega} \frac{1}{Lz} \cdot dz = L\omega - k_0\omega - \frac{1}{2}k_1\omega^2 - \frac{1}{3}k_2\omega^3 - \frac{1}{4}k_3\omega^4 - \cdots$
$+ k_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{4}k_3 + \cdots.$

Vergleicht man aber diese Zeile mit der Gleichung 10.), so findet sich, da beide Gleichungen für alle stetig auf einander folgenden Werthe von ω gelten, welche zwischen 0 und 1 liegen, — sogleich für A eine convergente Reihe und ein daraus hervorgehender Näherungswerth, nämlich

14) $A = k_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{4}k_3 + \cdots = 0{,}57721 \cdots,$

wodurch die Konstante des Integral-Logarithmen gefunden ist. —

Wird in der Gleichung 9.) $Lz = x$ gesetzt, so wie $L\beta = \xi$, so erhält man hieraus noch:

15) $\int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^x}{x} \cdot dx = A + L(-\xi) + \xi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\xi^4}{4!} + \cdots,$

wo die obere Grenze ξ negativ gedacht werden muß und wo A die (in N. 14. bestimmte) Konstante des Integral-Logarithmen vorstellt *).

Setzt man in den letztern Ausdruck für k_{n-1}, statt k_{n-2} seinen Werth aus der erstern Gleichung (1.), so findet sich

$$k_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n} - \left[(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3})k_{n-3} + (\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{4})k_{n-4} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{n}\right)k_0\right],$$

aus welcher Gleichung noch

$$k_{n-1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n} \quad \text{d. h.} \quad k_{n-1} < \frac{n-1}{2n(n+1)}$$

hervorgeht.

*) Dieser Gleichung 15. hat sich Mascheroni abermals bedient, um die Konstante A zu bestimmen. Er integrirt zu dem Ende $\int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^x}{x} \cdot dx$, n mal hinter einander theilweise, und reducirt dadurch dieses Integral auf $\int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^x}{x^{n+1}} \cdot dx$; diese letztere Differenzial-Funktion $\frac{e^x}{x^{n+1}}$ verwandelt er nun in eine unendliche nach ganzen und steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe und integrirt; es führt sich dabei eine (von n

Setzt man in 15.) $-x$ statt x, so wie $-\xi$ statt ξ, so erhält man weiter

---

abhängige) Konstante A_n ein, und er drückt sonach $\int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^x}{x} \cdot dx$ in diese letztere aus. — Nun setzt er hier $n+1$ statt n und vergleicht beide Ausdrücke mit einander und erhält

1) $\quad A_{n+1} = A_n - \frac{1}{n+1} \quad$ oder $\quad \Delta A_n + \frac{1}{n+1} = 0 \quad$ für $\quad \Delta n = 1$

als Reduktionsformel zur Bestimmung von A_n, während er zu gleicher Zeit

2) $\quad A_0 = A$

nachweist. Diese Reduktionsformel 1.), wenn in ihr nach und nach $0, 1, 2, 3, \cdots n-1$ statt n gesetzt wird, führt zu

3) $\quad A_n = A - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$

wo A die gesuchte Konstante des Integral-Logarithmen ist. Hierauf substituirt er diesen Werth statt A_n in den vorher erhaltenen Ausdruck für $\int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^x}{x} \cdot dx$, und setzt in dieser nun hervorgehenden Gleichung, $\xi = -n$ und $n = \infty$, so daß das Integral $\int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^x}{x} \cdot dx$, $= 0$ werden muß, und dadurch erhält er für die Konstante des Integral-Logarithmen die Gleichung

4) $\quad A = -Ln + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \quad$ für $\quad n = \infty.$

Zu diesem Resultate des Mascheroni läßt sich noch hinzufügen:

Da man statt n schreiben kann $\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1}$, also statt Ln die Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren dieses Produkts, so kann man diese Gleichung 4.) auch so schreiben

5) $\quad A = 1 - L\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - L\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - L\frac{4}{3} + \frac{1}{4} - L\frac{5}{4} + \frac{1}{5} - L\frac{6}{5} +$ in inf.,

welche unendliche Reihe, da sie abwechselnde Vorzeichen und immer kleiner werdende Glieder hat, zu den convergenten gehört.

Durch diese letztere Betrachtung ist es aber außer Zweifel gesetzt, daß die Gleichung 5.) den Werth von A desto genauer liefert, je größer n genommen wird.

Aus dieser Gleichung 4.) hat nun Mascheroni die Konstante des Integral-Logarithmen berechnet (indem sich die Summe

16) $\int_{\xi}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\cdot dx = -A - L\xi + \xi - \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{2!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\xi^3}{3!} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\xi^4}{4!} + \cdots,$

wo ξ beliebig positiv vorausgesetzt werden muß.

Und wird hier ax statt x gesetzt und $a\xi$ statt ξ, und dabei a beliebig positiv gedacht, und die neue Gleichung von der alten subtrahirt, so findet sich:

17) $$\int_{\xi}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\cdot dx = La + \xi - \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{3!} - \text{etc.}$$
$$-a\xi + \frac{1}{2}\frac{a^2\xi^2}{2!} - \frac{1}{3}\frac{a^3\xi^3}{3!} + \text{etc.}$$

und diese Gleichung geht für $\xi = +0$ über in

18) $$\int_{+0}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\cdot dx = La,$$

wenn nur a beliebig positiv ist.

§. 120.

Uebrigens ist es noch leicht, die Konstante A des Integral-Logarithmen durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. — Setzt man nämlich in N. 8.) $-L\alpha = n$, so findet sich sogleich

19) $A = -Ln + n - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{3!} - \frac{1}{4}\cdot\frac{n^4}{4!} + \cdots$ für $n = \infty$;

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$ für einen großen Werth von n mittelst der Formel berechnet, welche die „Lehre der endlichen Summen und Differenzen" für die Summation der Reihen überhaupt an die Hand giebt). — Gauß in seinen Disquisit. gen. circa seriem infinitam etc. etc. (S. d. II. Bd. der Gött. Comment.) bemerkt, daß Rechnungen des F. B. Nicolai die 20te Decimalstelle des Mascheroni haben unrichtig erkennen lassen, — so daß man in 19 Decimalstellen genau hat

6) $A = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 6 \cdots.$

Bei dieser Gelegenheit verweisen wir noch auf die Untersuchungen von Soldner (Théorie et Tables d'une nouvelle transcendante 1809.) und Bessel (Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Mathematik. Jahrgang 1811. 1tes Stück).

nun ist aber leicht einzusehen, daß

$$n-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2!}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{3!}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{n^4}{4!}+\cdots=\int_0^n\frac{1-e^{-y}}{y}\cdot dy$$

und

$$Ln=\int_0^n\frac{1}{1+y}\cdot dy-L\left(1+\frac{1}{n}\right)\ ^{*)}$$

ist; — folglich hat man, wenn man diese letztern beiden Gleichungen von einander subtrahirt und $n=\infty$ nimmt (weil dann $L\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$ wird) (aus 19.) auch noch die Konstante

20) $$A=\int_0^\infty\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}-\frac{e^{-y}}{y}\right)\cdot dy$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{1}{y(1+y)}-\frac{e^{-y}}{y}\right)\cdot dy=\int_0^\infty\frac{\frac{1}{1+y}-e^{-y}}{y}\cdot dy;$$

und es steht sich also nun die Konstante des Integral-Logarithmen ganz naturgemäß durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt.

§. 121.

Es ist nicht ohne Interesse zu sehen, wie man bei der Bestimmung des Differenzial-Koeffizienten des Logarithmen der (Gamma-) Funktion

$$\Gamma_x\quad \text{d. h.}\quad \int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot dz\quad \text{oder}\quad \int_{+0}^1\left(L\frac{1}{z}\right)^{x-1}\cdot dz,$$

wobei x stets als positiv vorausgesetzt werden muß, auf dieselbe Konstante A des Integral-Logarithmen stößt.

Differenziirt man nämlich Γ_x (nach x), so erhält man

21) $$\partial\Gamma_x=\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot Lz\cdot dz,$$

---

*) Es ist zwar auch $\log y=\int\frac{1}{y}\cdot dy$, also $Ln=\int_1^n\frac{1}{y}\cdot dy$; wollte man aber Ln durch ein mit 0 (Null) anfangendes Integral ausdrücken, so mußte man die obige Wendung nehmen. — Das Ganze läuft darauf hinaus, daß man $L(1+n)$ statt Ln schreibt, was, sobald $n=\infty$ ist, sogleich unbedingt hätte geschehen können.

welches Integral (nach §. 109.) abermals ein convergentes und ununterbrochenes ist, und welches man nun versuchen kann auszuwerthen.

Man hat aber zur Ausführung (nach N. 18.)

$$Lz = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-zy}}{y}\cdot dy,$$

folglich (aus 21.)

$$22) \qquad \partial\Gamma_x = \int_0^\infty \left(e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-zy}}{y}\cdot dy\right)\cdot dz.$$

Zerlegt man nun das für Lz gesetzte bestimmte Integral in zwei Integrale, wo jedes für sich weder zu den unterbrochenen noch zu den divergenten gehört, so kann man den Ausdruck zur Rechten in 22.) in zwei bestimmte Doppel-Integrale zerlegen, und in jedem die Ordnung der Integration umkehren, und man wird für $\partial\Gamma_x$ einen neuen Ausdruck erhalten. Man zerlege also so:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-zy}}{y}\cdot dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-f_y}{y}\cdot dy - \int_0^\infty \frac{e^{-zy}-f_y}{y}\cdot dy,$$

wo f_y noch ganz unbestimmt bleiben kann, und nur so gedacht werden muß, daß der gemachten Bedingung des Ununterbrochenen und der Convergenz der bestimmten Integrale genügt wird*).

Die Gleichung 22.) geht nun über in

$$23) \quad \partial\Gamma_x = \int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot\left(\int_0^\infty \frac{e^{-y}-f_y}{y}\cdot dy\right)\cdot dz$$
$$+\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot\left(\int_0^\infty \frac{f_y-e^{-zy}}{y}\cdot dy\right)\cdot dz.$$

*) Die einfachste Zerlegung würde seyn, wenn man $f_y = 0$ nähme, d. h. wenn man $\int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-zy}}{y}\cdot dy$ zerlegte in $\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\cdot dy - \int_0^\infty \frac{e^{-zy}}{y}\cdot dy$. — Allein beide letztern Integrale dürfen in keiner Rechnung mehr zugelassen werden, weil sie zu den unterbrochenen gehören, die gar keinen Werth haben.

Jetzt ist das erstere Doppel-Integral (in N. 23.)

$$=\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot dz\times\int_0^\infty \frac{e^{-y}-f_y}{y}\cdot dy$$

$$=\Gamma_x\times\int_0^\infty \frac{e^{-y}-f_y}{y}\cdot dy;$$

während das andere Doppel-Integral zur Rechten (in N. 23.)

$$=\int_0\int_0^\infty \frac{e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot(f_y-e^{-zy})}{y}\cdot dy\cdot dz$$

oder, wenn man hier zuerst nach z integrirt *),

$$=\int_0^\infty \frac{\Gamma_x\cdot f_y-\dfrac{\Gamma_x}{(1+y)^x}}{y}\cdot dy$$

$$=\Gamma_x\times\int_0^\infty\left(\frac{f_y}{y}-\frac{1}{y(1+y)^x}\right)\cdot dy$$

ist. — Man hat daher, wenn man diese Werthe in die 23.) substituirt und durch Γ_x dividirt,

24) $$\frac{\partial\Gamma_x}{\Gamma_x}\text{ d. h. }\partial(Log\,\Gamma_x)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y(1+y)^x}\right)\cdot dy,$$

oder eigentlich $$=\int_0^\infty\frac{e^{-y}-f_y}{y}\cdot dy+\int_0^\infty\frac{f_y-\left(\frac{1}{1+y}\right)^x}{y}\cdot dy,$$

wo f_y noch immer eine beliebige, aber der Bedingung der Existenz der bestimmten Integrale genügende Funktion von y ist. Setzt man hier, um dem Integrale zur Rechten eine bequemere Form zu geben, $\frac{1}{1+y}=v$, also $y=\frac{1-v}{v}=\frac{1}{v}-1$,

---

*) Es ist nämlich (nach §. 116.)

$$\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{x-1}\cdot dz=\Gamma_x;$$

setzt man aber $(1+y)z$ statt z, so daß dz in $(1+y)\cdot dz$ übergeht, so erhält man hieraus sogleich (nach §. 97.)

$$\int_0^\infty e^{-z-yz}\cdot z^{x-1}\cdot dz=\frac{\Gamma_x}{(1+y)^x}.$$

so erhält man

$$25)\quad \int_0^\infty \frac{f_y - \frac{1}{(1+y)^x}}{y}\cdot dy = \int_{+0}^1 \frac{\frac{1}{v}\cdot f_{\frac{1-v}{v}} - v^{x-1}}{1-v}\cdot dv,$$

welches bestimmte Integral am einfachsten ist, wenn man f_y so nimmt, daß $\frac{1}{v}\cdot f_{\frac{1-v}{v}} = 1$, d. h. $f_{\frac{1-v}{v}} = v$ wird. Dies giebt, sobald $\frac{1-v}{v} = y$ gesetzt wird, wo dann wiederum $v = \frac{1}{1+y}$ ist,

$$f_y = \frac{1}{1+y}.$$

Man hat dann (aus 24. u. 25.)

$$26)\quad \partial\, Log\, \Gamma_x = \int_0^\infty \frac{e^{-y} - \frac{1}{1+y}}{y}\cdot dy + \int_{+0}^1 \frac{1-v^{x-1}}{1-v}\cdot dv,$$

während das erstere bestimmte Integral zur Rechten, von x unabhängig (nach x konstant) ist, und zwar (nach N. 20.) genau $= -A$, sobald unter A die (in N. 14. des Textes und in N. 6. der zugehörigen Note bereits ausgewerthete) Konstante des Integral-Logarithmen verstanden wird. — Unter dieser Voraussetzung hat man also

$$27)\quad \partial\, Log\, \Gamma_x = -A + \int_{+0}^1 \frac{1-v^{x-1}}{1-v}\cdot dv,$$

wo A die Konstante des Integral-Logarithmen ist, während x stets positiv gedacht werden muß.

Setzt man $1+x$ statt x, so hat man noch

$$28)\quad \partial(Log\, \Gamma_{1+x})_x = -A + \int_{+0}^1 \frac{1-v^x}{1-v}\cdot dv,$$

wo x zwischen -1 und $+\infty$ liegen kann.

Findet man nun hieraus, indem man nach x integrirt, zunächst $Log\, \Gamma_{1+x}$ in A und x ausgedrückt, so hat man

wiederum ein Mittel, die Konstante A des Integral-Logarithmen zu finden, dadurch, daß man in dieser letzteren Gleichung statt x irgend einen solchen Werth setzt, für welchen Γ_{1+x}, also auch $Log\,\Gamma_{1+x}$ bereits bekannt ist. —

Um aber diese Integration nach x bequem ausführen zu können, muß man das bestimmte Integral in N. 28.) zur Rechten vorher noch in eine unendliche Reihe umformen. Zu dem Ende nehme man

$$\frac{1}{1-v} = 1+v+v^2+\cdots+v^n+\frac{v^{n+1}}{1-v}$$

und man hat dann

$$\int_{+0}^{1}\frac{1-v^x}{1-v}\cdot dx = \int_{+0}^{1}(1-v^x)(1+v+v^2+\cdots+v^n)\cdot dv$$
$$+\int_{+0}^{1}\frac{1-v^x}{1-v}\cdot v^{n+1}\cdot dv,$$

während dieses letztere Integral für $n=\infty$ offenbar unendlich-klein wird *). Schreibt man nun das Produkt $(1-v^x)(1+v+v^2+\cdots+v^n)$ lieber so:

$$(1-v^x)+(v-v^{x+1})+(v^2-v^{x+2})+\cdots+(v^n-v^{x+n}),$$

so erhält man:

---

*) Es beweist sich dies leicht so: Man schreibe zunächst

$$\frac{v-v^{1+x}}{1-v}\cdot v^n \quad \text{statt} \quad \frac{1-v^x}{1-v}\cdot v^{n+1},$$

damit der Exponent $1+x$ stets >1 ist, also $\frac{v-v^{1+x}}{1-v}$ für alle Werthe von v, die zwischen 0 und 1 liegen, stets endlich bleibt, so ist (nach §. 89. ⊙)

$$\int_{+0}^{1}\frac{1-v^x}{1-v}\cdot v^{n+1}dv = \frac{\xi-\xi^{1+x}}{1-\xi}\cdot\int_{+0}^{1}v^n\cdot dv = \frac{\xi-\xi^{1+x}}{1-\xi}\cdot\frac{1}{n+1},$$

wo ξ irgend ein Werth zwischen 0 und 1 ist. Dieser letztere Ausdruck wird aber unendlich-klein, sobald n unendlich-groß gedacht wird.

$$29)\quad \int_{+0}^{1}\frac{1-v^x}{1-v}\cdot dv = \frac{x}{1+x}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{2+x}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x}{3+x}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{n+x}\quad \text{für } n=\infty,$$

also (aus der N. 28.)

$$30)\quad \partial L(\Gamma_{1+x})_x = -A+\frac{x}{1+x}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}x}{1+\frac{1}{3}x}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}x}{1+\frac{1}{n}x}\quad \text{für } n=\infty,$$

wo x zwischen -1 und $+\infty$ liegen muß. — Integrirt man nun nach x ohne Weiteres, und bedenkt man, daß

$$\frac{1}{m}\int\frac{\frac{1}{m}x}{1+\frac{1}{m}x}\cdot dx = \frac{1}{m}x - \log\left(1+\frac{1}{m}x\right)$$

ist, so findet sich

$$31)\quad L(\Gamma_{1+x}) = -Ax+[x-L(1+x)]+[\tfrac{1}{2}x-L(1+\tfrac{1}{2}x)]+[\tfrac{1}{3}x-L(1+\tfrac{1}{3}x)]+\cdots+\left[\frac{1}{n}x-L\left(1+\frac{1}{n}x\right)\right]\quad \text{für } n=\infty,$$

welche Reihe convergirt für jeden Werth von x, der zwischen -1 und ∞ liegt. Aus dieser Gleichung 31. lassen sich nun die interessantesten Folgerungen ziehen.

Setzt man zunächst, um die Konstante A zu haben, statt x irgend eine positive ganze Zahl m, so erhält man, weil (nach §. 117. II.) $\Gamma_{1+m} = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots m$ ist,

$$L2+L3+\cdots+Lm = -mA+\Big[m-L(1+m)\Big]+\left[\frac{m}{2}-L\frac{m+2}{2}\right]+\left[\frac{m}{3}-L\frac{m+3}{3}\right]+\left[\frac{m}{4}-L\frac{m+4}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{n}-L\frac{m+n}{n}\right]$$

für $n=\infty$, woraus hervorgeht:

$$32)\quad A = \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{m}\cdot L[(1+n)(2+n)(3+n)\cdots(m+n)]\quad \text{für } n=\infty;$$

d. h. der Ausdruck rechts nähert sich der Konstante A desto mehr, je größer man n nimmt, und kommt ihr unendlich-nahe für n unendlich-groß, während statt m jede positive ganze Zahl gesetzt werden kann.

Das einfachste ist es natürlich, wenn man (in 31.) $x = 1$ oder (in 32.) $m = 1$ nimmt; man hat dann

$$33) \begin{cases} A = (1 - L2) + (\frac{1}{2} - L\frac{3}{2}) + (\frac{1}{3} - L\frac{4}{3}) + (\frac{1}{4} - L\frac{5}{4}) \\ \qquad\qquad + \left(\frac{1}{n} - L\frac{1+n}{n}\right) \\ \text{oder} \\ A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - L(1+n) \quad \text{für} \quad n = \infty; \end{cases}$$

und so sieht sich dieselbe Formel, nach welcher, wie wir in einer vorstehenden Note gezeigt haben, Mascheroni die Konstante A berechnet hat, auf eine eben so naturgemäße als einfache Weise gefunden, während der Weg, den Mascheroni genommen hat, um zu ihr zu gelangen, über seine Richtigkeit noch einigen Zweifel läßt.

§. 122.

Dieselbe N. 31. läßt aber auch noch mehrere andere interessante und wichtige Folgerungen zu.

Geht man z. B. in ihr vom Logarithmen zur Zahl über, d. h. potenzirt man die Basis e mit beiden Seiten der Gleichung 31.), um zur Linken Γ_{1+x} zu erhalten, so giebt dies noch

$$34) \qquad \Gamma_{1+x} = e^{-Ax} \cdot \frac{e^x}{1+x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{1+\frac{1}{2}x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{3}x}}{1+\frac{1}{3}x} \cdots$$
$$\cdots \times \frac{e^{\frac{1}{n}x}}{1+\frac{1}{n}x} \quad \text{für} \quad n = \infty,$$

wodurch Γ_{1+x} durch ein Produkt von n Faktoren ausgedrückt sich sieht, dessen Werth dem Werthe von Γ_{1+x} desto näher kommt, je größer n genommen wird, und unendlich-nahe

kommt für $n = \infty$, so lange nur x endlich ist und zwischen -1 und $+\infty$ liegt.

Will man ein ähnliches, aber von der Konstante A befreites Produkt für Γ_{1+x} haben, so darf man nur in 34.) zuerst 1 statt x setzen (wobei $\Gamma_2 = 1! = 1$ genommen werden muß), die neue Gleichung dann mit x potenziren, und zuletzt die N. 34. durch die jüngste Gleichung dividiren. Dies giebt

$$35)\quad \Gamma_{1+x} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot \cdots n}{(1+x)(2+x)(3+x)\cdots(n+x)}\cdot(n+1)^x \text{ für } n = \infty,$$

wo x zwischen -1 und $+\infty$ liegend gedacht wird; — oder, — wenn man (aus §. 117. II.) $\Gamma_{1+x} = x\cdot\Gamma_x$ zu Hilfe nimmt, welche Formel aber x beliebig positiv voraussetzt, — und die vorstehende Gleichung durch x dividirt, endlich auch noch $n-1$ statt n schreibt,

$$\Gamma_x = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdot n}{x\cdot(1+x)\cdot(2+x)\cdots(n-1+x)}\cdot\frac{(n+1)^x}{n+x} \text{ für } n = \infty,$$

$$\text{d. h. } = \frac{(n+1)!}{x^{n+1|1}}(n+1)^{x-1} \text{ für } n = \infty$$

oder

$$36)\quad \Gamma_x = \frac{\nu!}{x^{\nu|1}}\cdot\nu^{x-1} \text{ für } \nu = \infty,$$

wenn nur x beliebig positiv ist. Und dadurch ist (nach §. 101. III.) abermals $\Gamma_x = (x-1)!$ gefunden, wie im §. 117.

Dieselbe N. 31. giebt uns ferner, wenn wir die bekannte Gleichung

$$L\left(1+\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}x - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^2}x^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{m^3}x^3 - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

zu Hilfe nehmen (wobei wir aber x zwischen -1 und $+1$ uns denken müssen, damit die Reihe für jede positive ganze Zahl die statt m gesetzt werden mag, stets convergent d. h. geeignet ist, den durch L bezeichneten reellen Werth des Logarithmen zu liefern) — sogleich auch den $L(\Gamma_{1+x})$ in eine, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe. — Setzen wir nämlich der Kürze wegen die unendliche Reihe

37) $$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+ \text{ in inf. } = S_m,$$

so giebt die N. 31. auf die gedachte Weise augenblicklich

38) $$L(\Gamma_{1+x}) = -Ax+\tfrac{1}{2}S_2x^2-\tfrac{1}{3}S_3x^3+\tfrac{1}{4}S_4x^4-\tfrac{1}{5}S_5x^5+\ldots,$$

wenn nur x positiv oder negativ aber an sich kleiner als 1 gedacht wird, damit die Reihe zur Rechten convergirt.

Setzt man hier $-x$ statt x und addirt man die neue Reihe zu der alten; setzt man in dem Resultate noch $x\cdot\Gamma_x$ statt Γ_{1+x}, und $\frac{\pi}{Sin\,\pi x}$ statt $\Gamma_x\cdot\Gamma_{1-x}$ (alles nach §. 117. Anmerkg., wonach auch x bloß positiv vorausgesetzt werden darf), so findet sich weiter

39) $$L\left(\frac{\pi x}{Sin\,\pi x}\right) = S_2x^2+\tfrac{1}{2}S_4x^4+\tfrac{1}{3}S_6x^6+\tfrac{1}{4}S_8x^8+\ldots,$$

wenn nur x positiv und <1 ist. — (Doch darf man hier auch x negativ nehmen, nur an sich <1, wie die bloße Ansicht der Formel zeigt).

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und subtrahirt man solche dann von der N. 38.), so findet sich ferner

40) $$L(\Gamma_{1+x}) = \tfrac{1}{2}L\frac{\pi x}{Sin\,\pi x}-Ax-\tfrac{1}{3}S_3x^3-\tfrac{1}{5}S_5x^5-\tfrac{1}{7}S_7x^7-\ldots,$$

wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt.

Aus den Gleichungen 38.) und 40.) kann man nun wieder mehrere Gleichungen zur Bestimmung der Konstante A des Integral-Logarithmen ableiten, indem man dem x bestimmte Werthe beilegt; z. B. wenn man entweder $-\frac{1}{2}$ oder $+\frac{1}{2}$ statt x setzt, weil (nach §. 117. Anmerkg. und §. 105. XII., XIII a. und XI.)

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma_{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\Gamma_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

bekannt sind; — nur müssen die (in N. 37.) durch S_m bezeichneten Summen der sogenannten Reihen der reciproken Potenzen vorher bekannt seyn; und wegen dieses letzteren Umstandes wird

man hier abermals zu den Bernoulli'schen Zahlen geführt (nach §. 82. und §. 67.).

Anmerkg. Wir wissen (aus §. 95.), daß wir aus jedem ausgewertheten bestimmten Integral (nach z), welches noch eine Konstante x enthält, immer neue und neue bestimmte Integrale ausgewerthet erhalten, wenn man diese Gleichungen nach dieser Konstante x integrirt oder differenziirt, dabei aber darauf sieht, daß die dadurch neu entstehenden bestimmten Integrale jedesmal wieder ununterbrochene und convergente sind, so daß die Resultate nicht weiter beachtet werden, so oft eine dieser beiden letzterwähnten Bedingungen nicht erfüllt ist. — Nimmt man daher als Anfangs-Integral ein solches, welches Γ_x in seinen Werth mit aufnimmt, so wird das neue bestimmte Integral, wenn es aus dem vorigen durch Differenziiren erhalten worden ist, die Ableitung $\partial\Gamma_x$, oder auch (weil $\partial(Log\,\Gamma_x) = \frac{\partial\Gamma_x}{\Gamma_x}$ ist) das Produkt $\Gamma_x \cdot \partial(Log\,\Gamma_x)$ und somit auch die Konstante des Integral-Logarithmen in sich aufnehmen können, wodurch erklärt ist, wie diese letzterwähnte Konstante in noch vielen andern Werthen bestimmter Integrale eine Rolle spielen kann.

Obgleich wir übrigens in dem vorstehenden Paragraphen gelegentlich eine Anzahl Formeln beigebracht haben, nach denen Gamma-Funktionen (Fakultäten) berechnet werden können, so mag doch, eben weil viele andere bestimmte Integrale auf die Werthe der Gamma-Funktionen (d. h. der Fakultäten) zurückgeführt werden, dieser Berechnung das nächste Kapitel gewidmet werden. — Wir werden dann auf anderen Wegen auch noch einmal zu denselben Formeln gelangen.

Zehntes Kapitel.

Numerische Ausrechnung der reellen Fakultäten und Faktoriellen, und somit der Gamma-Funktionen und der Phi-Funktionen, d. h. der Euler'schen Integrale zweiter und erster Klasse.

§. 123.

1) Läßt sich $a^{m|r}$ nach Potenzen von m entwickeln, so kann die Reihe nur positive Potenzen von m in sich aufnehmen, da für $m = 0$, $a^{m|r} = 1$ ist. — Das allererste Glied dieser Reihe muß also $= 1$ seyn.

2) Läßt sich dagegen $a^{m|r}$ nach Potenzen von r entwickeln, so kann auch diese Entwickelung, so lange a positiv gedacht wird, nur positive Potenzen von r enthalten, weil wir im §. 115. bewiesen haben, daß $a^{m|r}$ für $r = \pm 0$ in a^m übergeht, so lange a positiv ist*). — Das allererste Glied dieser Entwickelung ist also $= a^m$, so lange a positiv vorausgesetzt wird. — Dabei kann man auch, wenn man will, statt der Potenz a^m ihren Werth

$1 + m \cdot La + \frac{m^2 \cdot (La)^2}{2!} + \frac{m^3 \cdot (La)^3}{3!} + \cdots$ setzen, wo La

---

*) Kramp glaubte (in dem schon angeführten Werke), daß eine solche Reihe für jeden Werth von a und m statt finden müsse, und dies ist die zweite Quelle der Irrthümer, in die er sich verwickelt sieht. — Wir glauben den Kramp zu ehren, indem wir auf die Trefflichkeit seiner Arbeit und zugleich auf seine Irrthümer aufmerksam machen, eben weil der letzteren wegen, die erstere bisher viel zu wenig Anerkennung gefunden hat.

den reellen Werth des natürlichen Logarithmen der positiven Zahl a vorstellt.

3) Finden aber die beiden erstern Entwickelungen statt, so läßt sich dann (wenn a positiv ist) die Faktorielle $a^{m|r}$ in eine Doppelreihe entwickeln, die in der einen Richtung nach positiven Potenzen von r, in der andern Richtung nach positiven Potenzen von m fortläuft, und deren allererstes Glied die Einheit ist.

4) Setzt man jedoch außer a auch noch r positiv voraus, so hat man (nach §. 102. VI. 2.)

$$a^{m|r} = r^m \cdot \frac{\left(\frac{a}{r}+m-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!} = r^m \cdot \frac{\Gamma_{(a:r)+m}}{\Gamma_{a:r}}.$$

Nun läßt sich r^m sogleich in die Reihe

$$1+m\cdot Lr+\frac{m^2\cdot(Lr)^2}{2!}+\frac{m^3\cdot(Lr)^3}{3!}+\cdots$$

verwandeln; aber auch das Integral

$$\Gamma_{(a:r)+m} \quad \text{d. h.} \quad \int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{\frac{a}{r}+m-1}\cdot dz$$

läßt sich nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine nach ganzen Potenzen von m fortlaufende Reihe verwandeln, da, wenn man μ mal hinter einander nach m differenziirt, solches

$$\partial^\mu(\Gamma_{(a:r)+m})_m = \int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{\frac{a}{r}+m-1}\cdot(Lz)^\mu\cdot dz$$

liefert, letzteres Integral aber für $m=0$ weder unterbrochen noch divergent ist, also allemal für jede ganze Zahl μ noch einen Werth hat.

Also läßt sich, wenigstens so lange man a und r, beide positiv voraussetzt, die Faktorielle $a^{m|r}$ allemal in eine nach ganzen positiven Potenzen von m fortlaufende Reihe entwickeln, die beliebig wo abgebrochen gedacht werden kann,

sobald man noch die Ergänzungsglieder sich hinzudenkt, welche die eben beschriebene Entwickelung noch an die Hand giebt.

5) Ist m positiv ganz, so läßt sich $a^{m|r}$ als ein Produkt von m Faktoren a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, ꝛc. ꝛc. allemal in eine Reihe verwandeln, die nach positiven ganzen Potenzen von r fortläuft. — Dasselbe kann man auch behaupten, wenn m negativ ganz ist, weil dann die Faktorielle $a^{m|r}$ nichts anders als den Quotienten $\frac{1}{(a-r)(a-2r)(a-3r)\cdots(a-mr)}$ bedeutet, dieser aber nach ganzen und positiven Potenzen von r sich entwickelt, so lange nicht $a=0$ ist. — Es fragt sich aber, ob auch, wenn m beliebig gebrochen ist, positiv oder negativ, — die Faktorielle $a^{m|r}$ sich noch nach positiven ganzen Potenzen von r entwickeln lassen werde? —

Diese Frage wird nun die folgende Untersuchung bejahend beantworten, wenigstens für die Fälle, in denen a und r positiv gedacht werden.

§. 124.

Aufgabe. Die Koeffizienten B, C, D, E, ꝛc. ꝛc. der nach §. 123. N. 4. allemal existirenden Reihe

1) $$a^{m|r} = 1 + B \cdot m + C \cdot m^2 + D \cdot m^3 + \cdots$$

zu finden, so lange a und r positiv vorausgesetzt werden.

Auflösung. Die gesuchten Koeffizienten B, C, D, ꝛc. sind offenbar Funktionen von a und r. — Man nehme die Gleichung (§. 102. V. 6.), nämlich

2) $$a^{m|r} \cdot (a+mr) = a \cdot (a+r)^{m|r};$$

man substituire in 1.) $a+r$ statt a und man erhält:

3) $$(a+r)^{m|r} = 1 + (B+\Delta B) \cdot m + (C+\Delta C) \cdot m^2 + (D+\Delta D) \cdot m^3 + \cdots,$$

wo die Differenzen ΔB, ΔC, ΔD, ꝛc. zu der Differenz $\Delta a = r$ gehören. — Man substituire nun die Reihen 1.) u. 3.) in die Gleichung 2.), so wird sie die folgende:

$$a+\begin{pmatrix}aB\\+r\end{pmatrix}\cdot m+\begin{pmatrix}aC\\+rB\end{pmatrix}\cdot m^2+\begin{pmatrix}aD\\+rC\end{pmatrix}\cdot m^3+\cdots$$

$$=a+\begin{pmatrix}aB\\+a\cdot\Delta B\end{pmatrix}\cdot m+\begin{pmatrix}aC\\+a\cdot\Delta C\end{pmatrix}\cdot m^2+\begin{pmatrix}aD\\+a\cdot\Delta D\end{pmatrix}\cdot m^3+\cdots.$$

Aus der Vergleichung dieser einzelnen Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von m ergiebt sich nun für $\Delta a = r$ sogleich:

$$\Delta B = \frac{r}{a}, \quad \text{also} \quad B = \Sigma\left(\frac{r}{a}\right)+c;$$

$$\Delta C = \frac{r}{a}\cdot B, \quad \text{also} \quad C = \Sigma\left(\frac{r}{a}\cdot B\right)+c';$$

u. s. w. f., wo c, c', rc. rc. noch zu bestimmende Konstanten (nach a) sind.

Nun findet sich aber $\Sigma\left(\frac{r}{a}\right)$ für $\Delta a = r$, aus der Gleichung XIII. des §. 69., wenn man daselbst $\frac{r}{x}$ statt f_x, nachgehends aber bezüglich a und r, statt x und h setzt, und zwar findet man den Koeffizienten B von nachstehender Form:

$$4)\quad B = c+La-\tfrac{1}{2}\frac{r}{a}-\mathfrak{B}_1\cdot\frac{r^2}{2a^2}+\mathfrak{B}_3\cdot\frac{r^4}{4a^4}-\mathfrak{B}_5\cdot\frac{r^6}{6a^6}+\cdots,$$

wo $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, ... die (stets positiv gedachten) Bernoulli'schen Zahlen sind und wo die Konstante c, die eine Funktion von r seyn kann, noch näher bestimmt werden muß, während, wo man auch die Reihe abbrechen mag, das Ergänzungsglied (nach §. 69.) allemal kleiner als das Glied ist, bei welchem sie abbricht. Die Bestimmung der Konstante c geschieht dadurch, daß man den für einen bestimmten Werth von a z. B. für $a = +\infty$ bekannten Werth der Funktion B_a oder B kennt. Weil aber (nach §. 115. XXXV^b.) für $a = +\infty$ die Entwickelung von $a^{m|r}$ in die der Potenz a^m d. h. in $1+m\cdot La+\frac{m^2\cdot(La)^2}{2!}+\cdots$ übergehen muß, so ist für $a = +\infty$ der Koeffizient B (von m^1 in N. 1.) dem La

gleich, und da sich aus 4. für $a = +\infty$, $B = c + La$ sich ergiebt, so folgt daraus

$$c = 0,$$

also (aus 4.)

$$5) \quad B = La - \tfrac{1}{2}\frac{r}{a} - \mathfrak{B}_1 \cdot \frac{r^2}{2a^2} + \mathfrak{B}_3 \cdot \frac{r^4}{4a^4} - \mathfrak{B}_5 \cdot \frac{r^6}{6a^6} + \text{ꝛc. ꝛc.},$$

welche Reihe (nach §. 69.) als eine endliche angesehen werden muß, zu welcher, wenn sie mit dem Gliede

$+(-1)^{\mu}\mathfrak{B}_{2\mu-1} \cdot \frac{r^{2\mu}}{2\mu \cdot a^{2\mu}}$ abbricht, allemal noch ein Ergänzungsglied hinzukommt, welches kleiner als dieses letzte Glied ist.

Die übrigen Koeffizienten C, D, ꝛc. der gesuchten Reihe 1.) finden sich nun aus B und aus einander, wenn sie auch ziemlich verwickelt zu werden drohen, genau auf demselben Wege. — Uns genügt es hier zu bemerken:

α) daß man (aus der wiederholten Anwendung der V. des §. 68. oder der XIII. des §. 69.) die Ueberzeugung gewinnt, wie diese Koeffizienten C, D, E, ꝛc. bezüglich mit den Gliedern $\frac{(La)^2}{2!}$, $\frac{(La)^3}{3!}$, $\frac{(La)^4}{4!}$, ꝛc. anfangen und außerdem nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{r}{a}$ fortschreiten;

β) daß daher bei jeder neuen Summenbestimmung nach der Formel XIII. des §. 69., die hinzutretenden Konstanten c', c'', ꝛc. ꝛc. alle der Null gleich genommen werden müssen, weil (nach §. 115. XXXV^b.) dieselben Koeffizienten C, D, E, ꝛc. ꝛc. für $a = +\infty$ in bezüglich $\frac{(La)^2}{2!}$, $\frac{(La)^3}{3!}$, $\frac{(La)^4}{4!}$, ꝛc. ꝛc. übergehen müssen;

γ) daß also alle Koeffizienten C, D, E ꝛc. ꝛc. eben so wie B, als Reihen erscheinen, die nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{r}{a}$, also von r fortlaufen.

δ) Also ist zu gleicher Zeit außer Zweifel gestellt, daß $a^{m|r}$, so lange a und r positiv sind, sich allemal auch in eine nach ganzen positiven Potenzen von r fortlaufende Reihe verwandeln lassen werde. Dadurch ist aber der Schluß des vorhergehenden Paragraphen erledigt und die Kramp'sche Aufgabe des folgenden Paragraphen gerechtfertigt.

§. 125.

Wir haben also im vorstehenden §. 124. gefunden, so lange a und r positiv sind und wenn der Kürze wegen

$$\text{I.} \quad \tfrac{1}{2}\varrho+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot\varrho^2-\tfrac{1}{4}\mathfrak{B}_3\cdot\varrho^4+\tfrac{1}{6}\mathfrak{B}_5\cdot\varrho^6-\tfrac{1}{8}\mathfrak{B}_7\cdot\varrho^8-\cdots$$
$$+(-1)^{\mu-1}\frac{1}{2\mu}\cdot\mathfrak{B}_{2\mu-1}\cdot\varrho^{2\mu}+(-1)^{\mu}k\cdot\frac{1}{2\mu}\cdot\mathfrak{B}_{2\mu-1}\varrho^{2\mu}=\mathfrak{L}\varrho$$

gesetzt wird, wo k an sich <1 ist,

$$\text{II.} \quad a^{m|r}=1+\left(La-\mathfrak{L}\frac{r}{a}\right)\cdot m+C\cdot m^2+D\cdot m^3+ \text{ic. ic.},$$

während die Koeffizienten C, D, ic. ic. Reihen sind, die nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{r}{a}$ fortlaufen und bezüglich mit den Gliedern $\frac{(La)^2}{2!}$, $\frac{(La)^3}{3!}$, ic. ic. anfangen und überall, wo sie abbrechen, ihre Ergänzungsglieder haben. Dabei stellen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, ic. ic. die im §. 67. definirten Bernoullischen Zahlen vor.

Weil aber der Koeffizient von m^1 in der vorstehenden Entwickelung von $a^{m|r}$ (nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze auch gefunden wird, wenn man $a^{m|r}$ d. h. $\frac{r^m\cdot\Gamma_{(a:r)+m}}{\Gamma_{a:r}}$ nach m differenziirt und dann 0 statt m schreibt, so findet sich solcher auch, wenn $\frac{a}{r}=z$ gesetzt wird,

$$=Lr+\frac{\partial\Gamma_z}{\Gamma_z}=Lr+\partial(Log\,\Gamma_z).$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Koeffizienten ergiebt sich nun sogleich:

III. $$\partial(Log\,\Gamma_z) = Lz - \mathfrak{L}\frac{1}{z}$$

$$= Lz - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot\frac{1}{z^2} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}_3\cdot\frac{1}{z^4} - \tfrac{1}{6}\mathfrak{B}_5\cdot\frac{1}{z^6} + \cdots;$$

folglich, wenn man nach z integrirt und die reellen Werthe der Logarithmen nimmt:

IV. $$L(\Gamma_z) = c + (z-\tfrac{1}{2})\cdot Lz - z + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{B}_3\cdot\frac{1}{z^3}$$
$$+ \frac{1}{5\cdot 6}\mathfrak{B}_5\cdot\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7\cdot 8}\mathfrak{B}_7\cdot\frac{1}{z^7} + \cdots,$$

welche Reihe als eine endliche anzusehen ist, deren Ergänzungsglied kleiner ist, als das Glied, bei welchem man sie abbrechen läßt, während c eine noch zu bestimmende Konstante ist, die jedoch leicht dadurch bestimmt wird, daß man statt z irgend eine positive ganze Zahl m setzt, weil $\Gamma_m = (m-1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \cdots (m-1)$ dann bekannt ist.

Wenn man aber eine der Eigenschaften der Gamma-Funktionen, nämlich (§. 106. XVIII.) die Eigenschaft zu Hilfe nimmt nach welcher ist:

α) $$L(\Gamma_z) + L(\Gamma_{z+\frac{1}{2}}) - L(\Gamma_{2z}) = (1-2z)L2 + \tfrac{1}{2}L\pi,$$

und hier herein (aus IV.) statt $L(\Gamma_z)$, $L(\Gamma_{z+\frac{1}{2}})$ und $L(\Gamma_{2z})$ ihre Werthe setzt, aber $z=\infty$ nimmt, so bestimmt sich diese Konstante c am bequemsten. Man hat nämlich (aus IV.)

$$\left.\begin{array}{lll} \beta) & L(\Gamma_z) & = c + (z-\tfrac{1}{2})\cdot Lz - z \\ \gamma) & L(\Gamma_{z+\frac{1}{2}}) & = c + z\cdot L(z+\tfrac{1}{2}) - (z+\tfrac{1}{2}) \\ \delta) & L(\Gamma_{2z}) & = c + (2z-\tfrac{1}{2})\cdot L(2z) - 2z \end{array}\right\} \text{ für } z = +\infty.$$

Diese Werthe in die Gleichung α.) substituirt, geben nun, wenn noch $Lz + L2$ statt $L(2z)$ und statt $L(z+\frac{1}{2}) - Lz$ zunächst $L\left(1+\frac{1}{2z}\right)$, dann aber das erste Glied $\frac{1}{2z}$ der dafür zu

setzenden unendlichen Reihe schreibt (wegen $z = +\infty$), augenblicklich

ε) $c = \frac{1}{2}L(2\pi) = L(\sqrt{2\pi})$.

Setzt man nun noch der Kürze wegen

$$\text{V.}\quad \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot\varrho - \frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{B}_3\cdot\varrho^3 + \frac{1}{5\cdot 6}\mathfrak{B}_5\cdot\varrho^5 - \frac{1}{7\cdot 8}\mathfrak{B}_7\cdot\varrho^7 + \cdots$$
$$+(-1)^{\mu-1}\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu)}\mathfrak{B}_{2\mu-1}\cdot\varrho^{2\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}k\cdot\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu)}\mathfrak{B}_{2\mu-1}\cdot\varrho^{2\mu-1} = \mathfrak{S}\varrho,$$

so geht die IV. dadurch über in

$$\text{VI.}\quad L(\Gamma_z) = L(\sqrt{2\pi}) + (z-\tfrac{1}{2})\cdot Lz - z + \mathfrak{S}\frac{1}{z}\ \text{*)},$$

---

*) Geht man in der Gleichung VI. vom Logarithmen zur Zahl über, und bedenkt man, daß

$$\mathfrak{S}\frac{1}{z} < \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot\frac{1}{z}\quad\text{und}\quad > \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{B}_3\cdot\frac{1}{z^3}$$

ist, — wenigstens für jeden Werth von z, der >1 gedacht wird, — so ergiebt sich sogleich die Wahrheit, daß für $z>1$

$$\Gamma_z \quad\text{oder}\quad (z-1)! = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{z}{e}\right)^{z}\cdot M,$$

ist, während LM zwischen $\frac{1}{12z}$ und $\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3}$ liegt.

Es ist daher LM stets positiv, also M stets >1; aber es rückt LM der Null, also der Faktor M selbst der Einheit desto näher, je größer z ist, so daß

$M = 1$ wird, für $z = \infty$.

Da der Binomial-Koeffizient m_n (der n^{te} von der m^{ten} Potenz eines Binomiums), $= \frac{m^{n|-1}}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ ist (S. §. 102. VI. 4.), so kann man sich dieser Näherungs-Formel auch bedienen, wenn für einen sehr großen (ganzen oder gebrochenen aber positiven) Werth von m, der n^{te} Binomial-Koeffizient berechnet werden soll, für den Fall, daß auch n und $m-n$ noch positiv und noch groß sind, wie dies Laplace in seiner Théo-

wo $\mathfrak{S}\frac{1}{z}$ als eine Reihe anzusehen ist, zu welcher, wo man sie auch abbrechen läßt, allemal ein Ergänzungsglied hinzukommt, welches kleiner ist, als das Glied, bei welchem man die Reihe abgebrochen hat.

In den Formeln IV. und VI. wird z positiv vorausgesetzt.

Addirt man zu der vorstehenden Gleichung VI. noch Lz, so erhält man (weil $Lz+L[(z-1)!] = L(z!)$ ist)

$$\text{VII.}\quad L(z!) = -z+(z+\tfrac{1}{2})\cdot Lz+\tfrac{1}{2}L(2\pi)+\mathfrak{S}\frac{1}{z},$$

wo z beliebig positiv gedacht werden muß; und dies ist die von Euler (Instit. Calc. diff. pag. 466.) unter der Voraussetzung, daß z eine positive ganze Zahl vorstellt (in welchem Falle unter z! das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots z$ verstanden wird) bereits gefundene Gleichung; während jedoch Gauß in N. 58. der oben schon mehrmals angeführten Abhandlung die Meinung ausspricht, daß das Verfahren des Euler den Satz auch für den Fall in sich schließe, in welchem z (positiv) gebrochen ist. — Wie dies zu verstehen seyn dürfte, wird später (im §. 127.) nachgewiesen.

Anmerkg. Man kann sich nun der Formel VI. bedienen, um für größere Werthe von z z. B. für $z>9$, die Werthe von $L(\Gamma_z)$ zu berechnen; man kann aber auch umgekehrt für gegebene positive ganze Werthe von z, und überhaupt für alle Werthe von z, für welche die Werthe von Γ_z schon bekannt sind, aus dieser Formel den Werth der Funktion $\mathfrak{S}\frac{1}{z}$ berechnen.

Namentlich erhält man sogleich, weil

rie des probabilités für die mittleren Koeffizienten einer hohen ganzen Potenz gethan hat. — Das vorstehende giebt diesen Rechnungen die größte Einfachheit verbunden mit der größten Gründlichkeit, in so ferne wir zu unseren Resultaten ohne alle Kunstgriffe, bloß auf den in der Elementar-Analysis gebräuchlichen Wegen gelangt sind.

$$\Gamma_1 = 0! = 1, \qquad \Gamma_{\frac{1}{2}} = (-\tfrac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$$

und

$$\Gamma_{n+\frac{1}{2}} = (n-\tfrac{1}{2})! = \frac{1^{n|2}}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$$

ist (aus dieser Formel VI., wenn man nach und nach

$z=1$, $z=\frac{1}{2}$, $z=n+\frac{1}{2}$ und $z=n+1$ setzt):

1) $\mathfrak{S}\,1 \quad = 1 - L(\sqrt{2\pi})$;

2) $\mathfrak{S}\,2 \quad = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot L2$;

3) $\mathfrak{S}\frac{2}{2n+1} = n + \frac{1}{2} + L(1^{n|2}) + n \cdot L(2n+1) - \frac{1}{2} L2$;

4) $\mathfrak{S}\frac{1}{n+1} = L(n!) + (n+1) - L(\sqrt{2\pi}) - (n+\frac{1}{2}) \cdot L(n+1)$.

Und wenn in dem anderen Falle, wo die Werthe von Fakultäten berechnet werden, die Fakultät $(c-1)!$ für kleinere positive oder für negative (gebrochene) Werthe von c auszuwerthen wäre, so würde man die Formel (§. 102. V.)

$$(c-1)! = \frac{(c+n-1)!}{c^{n|1}}$$

anwenden, und dabei n positiv ganz und beliebig und so groß nehmen, daß $c+n$ positiv und abermals groß genug (etwa >9) wird, während $c^{n|1} = c(c+1)(c+2) \cdots (c+n-1)$ zwar positiv, auch negativ seyn, aber an sich doch mit Logarithmen berechnet werden kann.

Weil man ferner (nach §. 102. VI. 2.), wenn nur r positiv ist,

$$a^{m|r} = r^m \cdot \frac{[(a:r)+m-1]!}{[(a:r)-1]!}$$

hat, so kann man nun auch $L(a^{m|r})$ berechnen, wenn nur r positiv ist.

Und da endlich (§. 102. IV.)

$$a^{m|-r} = (a+r-mr)^{m|+r}$$

ist, so darf man nur die letztere Faktorielle (zur Rechten) berech-

nen, um die erstere mit der negativen Differenz $-r$ berechnet zu haben.

§. 126.

Man kann aber auch direkt und unmittelbar aus der Definition III. des §. 101., nämlich aus

1) $\quad x! = \frac{1^{\nu|1}}{(1+x)^{\nu|1}} \cdot \nu^x = \frac{\nu!}{(1+x)^{\nu|1}} \cdot \nu^x$ für $\nu = +\infty$

eine Reihe zur Berechnung von $L(x!)$ ableiten.

Nimmt man nämlich in der Gleichung 1.) links und rechts den Logarithmen und differenzirt man dann die entstehende Gleichung nach x, so erhält man

2) $\quad \partial[Log(x!)] = L\nu - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \cdots - \frac{1}{\nu+x},$

für $\nu = +\infty$ *).

Verwandelt man nun diese Brüche in unendliche Reihen, welche nach ganzen Potenzen von x fortlaufen und bezeichnet man die Potenz-Summe

VIII. $\quad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} +$ in inf. durch S_μ,

so wie die Konstante

IX. $\quad -L\nu + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\nu}$ für $\nu = \infty$, durch A, **)

so erhält man augenblicklich

3) $\quad \partial[Log(x!)] = -A + S_2 \cdot x - S_3 \cdot x^2 + S_4 \cdot x^3 - S_5 \cdot x^4 + \cdots,$

---

*) Weil

$$d[log(x!)] = \frac{d(x!)}{x!}$$

allemal reell ist, auch wenn $x!$ negativ, also $log(x!)$ imaginär und unendlich-vieldeutig seyn sollte, so muß rechts (in N. 2.) statt $log\,\nu$ der reelle Werth $L\nu$ gesetzt werden.

**) Nach der Note zu §. 119. ist diese Zahl A zugleich die sogenannte Konstante des Integral-Logarithmen.

wo die Konstante A aus IX. bestimmt ist und näherungsweise desto genauer berechnet wird, je größer man ν nimmt, während die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{\nu}$ nicht direkt, sondern durch Anwendung der Formeln §. 82.) und §. 69.), in welche die Bernoulli'schen Zahlen eingehen, berechnet wird. Und diese Reihe zur Rechten (in 3.) ist convergent, so oft x zwischen -1 und $+1$ liegt, so daß in diesem Falle, zur Linken statt $Log(x!)$ auch $L(x!)$ gesetzt werden kann, da $x!$ stets positiv ist (für dieselben Werthe von x).

Integrirt man aber die 3.) nach x, und bestimmt man die neu eingehende Konstante dadurch, daß für $x=0$ die Gleichung in $0=0$ übergehen muß, in so ferne $0!=1$, also $L(0!)=0$ ist, so ergiebt sich:

X. $$L(x!) = -Ax+\tfrac{1}{2}S_2\cdot x^2-\tfrac{1}{3}S_3\cdot x^3+\tfrac{1}{4}S_4\cdot x^4-\cdots,$$

wodurch unsere Aufgabe gelöst ist, während jedoch, damit die Reihe zur Rechten convergent ist, der Werth von x zwischen -1 und $+1$ liegen muß, so daß links statt $x!$ auch Γ_{1+x} geschrieben werden kann (Vgl. §. 122. N. 38.).

Anmerkg. 1. Denkt man sich hier die Glieder von S_2, S_3, S_4, ꝛc. ꝛc. vertikal unter einander geschrieben und bezüglich mit $\frac{1}{2}x^2$, $-\frac{1}{3}x^3$, $+\frac{1}{4}x^4$, $-$ ꝛc. ꝛc. multiplicirt, so drückt sich $L(x!)$ als eine Doppelreihe aus, deren r^{te} Horizontalreihe

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{r}\right)^4-\tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{r}\right)^5+\cdots,$$

also offenbar

$$=\frac{x}{r}-L\left(1+\frac{x}{r}\right)$$

ist. Demnach geht nun die X. auch noch über in

4) $$L(x!) = -Ax+x-L(1+x)+\tfrac{1}{2}x-L(1+\tfrac{1}{2}x) \\ +\tfrac{1}{3}x-L(1+\tfrac{1}{3}x)+\cdots,$$

wo x zwischen -1 und $+1$ liegen muß. (Vgl. §. 121. N. 31.)

Diese Gleichung giebt zunächst für $x = 1$, weil $L(1!) - L1 = 0$ ist,

5) $A = 1 - L2 + \frac{1}{2} - L\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - L\frac{4}{3} + \frac{1}{4} - L\frac{5}{4} + \cdots$, *)

welche Reihe zur Rechten convergent ist, wodurch außer Zweifel gesetzt sich sieht, daß die Konstante A wirklich einen bestimmten endlichen Werth hat.

Differenziirt man aber die Gleichung 4.) wieder nach x, so findet sich noch

6) $\partial[L(x!)]$ d. h. $\frac{\partial(x!)}{x!}$

$$= -A + 1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+x} + \cdots + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+x}$$

für $\nu = \infty$.

Weil jedoch

$$\frac{1}{r} = \int_0^1 y^{r-1} \cdot dy$$

ist, so kann man diese Reihe (in 6.) auch wieder durch ein bestimmtes Integral ausdrücken, nämlich (immer für $\nu = \infty$)

$\partial[L(x!)]$ oder $\frac{\partial(x!)}{x!}$

$$= -A + \int_0^1 (1 - y^x + y - y^{1+x} + y^2 - y^{2+x} + \cdots + y^\nu - y^{\nu+x}) \cdot dy$$

$$= -A + \int_0^1 \left(\frac{1-y^{\nu+1}}{1-y} - \frac{y^x(1-y^{\nu+1})}{1-y}\right) \cdot dy$$

$$= -A + \int_0^1 \frac{1-y^x}{1-y} \cdot dy - \int_0^1 \frac{1-y^x}{1-y} \cdot y^{\nu+1} \cdot dy$$

d. h., weil das letztere Integral (nach Note zu §. 119.) unendlich-klein ist,

*) Die frühere Untersuchung über den Integral-Logarithmen (§. 118. u. d. folg.) hat gezeigt, daß die sogenannte Konstante (A) des Integral-Logarithmen mit dieser Konstante A genau übereinstimmt. — Man hat daher nach der dortigen Ausrechnung

$$A = 0,\ 577215\ 664901\ 532860\ 6 \cdots.$$

7) $\partial[L(x!)]$ oder $\frac{\partial(x!)}{x!} = -A + \int_0^1 \frac{1-y^x}{1-y} \cdot dy$,

während $1+x$ positiv vorausgesetzt wird, also überall Γ_{1+x} statt $x!$ gesetzt werden kann.

Setzt man nun $x-1$ statt x, so ergiebt sich noch:

8) $\partial[L(\Gamma_x)]$ d. h. $\frac{\partial\Gamma_x}{\Gamma_x} = -A + \int_0^1 \frac{1-y^{x-1}}{1-y} \cdot dy$,

wobei x positiv gedacht werden muß, während A die sogenannte Konstante des Integral-Logarithmen ist.

Und so sehen sich also auch alle übrigen Resultate, welche im §. 121. entwickelt worden sind, hier durch einen eben so einfachen als naturgemäßen Gang hergestellt. Namentlich ist hier die X., zu deren Herstellung am angeführten Orte alle die hiesigen Nummern von 8.) rückwärts bis 4.) als Mittel vorausgeschickt werden mußten, hier sogleich unmittelbar und direkt aus der Definition von $x!$ entnommen.

Anmerk. 2. Diese Formel X. ist zur Berechnung von Γ_{1+x} oder $x!$ für kleine (positive oder negative) Werthe von x besonders geeignet, sobald nur vorher die reciproken Potenz-Summen S_2, S_3, S_4, 2c. bekannt und berechnet sind. Die Berechnung dieser letztern führt aber auch wieder zu den Bernoulli'schen Zahlen zurück, sobald man sie, wenigstens für die ungeraden Zeiger, mittelst der Summen-Formel §. 68. V. oder XIII. des §. 69. (nach N. 4. des §. 54.) bewirkt. Indem man übrigens x bald negativ, bald positiv nimmt, aber zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, erhält man Γ_z von $z=1$ bis zu $z=\frac{1}{2}$ und von $z=1$ bis $z=\frac{3}{2}$. — Die Werthe von Γ_z für z zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ ergeben sich dann leicht aus der Formel

$$\Gamma_z \cdot \Gamma_{1-z} = \frac{\pi}{Sin\, z\pi} \quad \text{d. h.} \quad \Gamma_z = \frac{\pi}{Sin\, z\pi \cdot \Gamma_{1-z}}$$

oder aus der Formel

$$z \cdot \Gamma_z = \Gamma_{1+z} \quad \text{d. h.} \quad \Gamma_z = \frac{\Gamma_{1+z}}{z}.$$

Solcher Vortheile lassen sich noch Viele anwenden, um die Anzahl der direkt aus der Reihe zu berechnenden Werthe von Γ_x zu vermindern, im Falle eine Tafel solcher Werthe berechnet werden soll.

§. 127.

Wir können nicht unterlassen zu bemerken, daß diese Formeln VII.—X., ja selbst die Formeln §. 101. I. und III., die wir als Definition der gebrochenen Faktoriellen und Fakultäten benutzt haben, schon in Euler's Differenzialrechnung Cap. XVII. und Cap. XVI. zu finden sind, wenn auch Euler damals dessen, was er leistete, sich nicht überall vollkommen bewußt gewesen ist. — Euler beschäftigt sich nämlich in dem angeführten Cap. XVII. mit der sogenannten Interpolation der Reihen, d. h. mit dem Problem: „Wenn man von einer Reihe das 1te, 2te, 3te, 4te, „ ... nte Glied kennt, eine Funktion von x zu finden, welche „für $x = 1, 2, 3, 4, \cdots n$ dieses 1te, 2te, 3te, 4te, ... nte „Glied giebt, welche aber auch für beliebige gebrochene Werthe „von x, jedesmal einen bestimmten Werth hat." — Es ist klar, daß wenn dieses Problem in Bezug auf die Reihe

$$1, \quad 1\cdot2, \quad 1\cdot2\cdot3, \quad 1\cdot2\cdot3\cdot4, \quad \cdots \quad 1\cdot2\cdot3\cdot4 \cdots n$$

gelöst wird, man eine Funktion f_x findet, welche für $x = n$, die ganze Fakultät $n!$ d. h. $1\cdot2\cdot3 \cdots n$ liefert, welche daher, eben weil sie für gebrochene Werthe von x auch Werthe hat, als Definition von $x!$ für jeden gebrochenen, wie ganzen Werth von x dienen kann.

Um seine Aufgabe zu lösen betrachtet Euler zuerst eine Reihe von der Form

$$1) \qquad A, \quad A+B, \quad A+B+C, \quad A+B+C+D, \quad \cdots,$$

setzt die Funktion X_x von x, als gegeben und so voraus, daß

$$2) \qquad X_1 = A, \quad X_2 = B, \quad X_3 = C, \quad X_4 = D, \quad \text{u. s. w.}$$

ist, und sucht nun eine Funktion f_x so, daß f_x für $x = 1, 2, 3,$ 2c. 2c. die Glieder A, $A+B$, $A+B+C$, 2c. 2c.

der vorstehenden Reihe 1.) giebt, also daß f_m die Summe von m der ersten Glieder der Reihe A, B, C, D, 2c. 2c. vorstellt.

Da das Problem der Interpolation (nach §. 81.) jedesmal ein völlig unbestimmtes ist, in so ferne unendlich-viele verschiedene Funktionen von x existiren, welche für $x = 1, 2, 3, 4 \cdots$ bezüglich dieselben Werthe, dagegen für einen gebrochenen Werth von x verschiedene Werthe liefern, so steht es stets in der Willkühr, über das stetige Fortschreiten der Werthe von f_x zwischen je zwei ganzen Werthen von x noch irgend eine beliebige Annahme zu machen.

Euler sucht nun zuerst den Uebergang des Gliedes f_m zu dem Gliede f_{m+x}, unter der Voraussetzung, daß m und x positive ganze Zahlen sind, in Formeln zu bringen; und er unterscheidet dabei mehrere Fälle, nämlich wenn für $\nu = \infty$

α) entweder $X_{\nu+1}$ d. h. $f_{\nu+1} - f_\nu$ d. h. Δf_ν (für $\Delta\nu = 1$) $= \pm\frac{1}{\infty}$ wird;

β) oder $X_{\nu+2} - X_{\nu+1}$ d. h. ΔX_ν d. h. $\Delta^2 f_\nu$ (für $\Delta\nu = 1$) $= \pm\frac{1}{\infty}$ wird;

γ) oder $(X_{\nu+3} - X_{\nu+2}) - (X_{\nu+2} - X_{\nu+1})$ d. h. $\Delta^3 f_\nu$ (für $\Delta\nu = 1$) $= \pm\frac{1}{\infty}$ wird;

u. s. w. f.

I. Im erstern Falle (α.) drückt Euler nun das Gesetz des Ueberganges vom Gliede f_m zum Gliede f_{m+x} dadurch aus, daß er f_{m+x} (als die Summe der erstern $m+x$ Glieder der Reihe

2) $A, \quad B, \quad C, \quad D,$ 2c. 2c.)

gleich setzt der Summe f_m der erstern m Glieder, plus allen übrigen einzelnen Gliedern, vom $(m+1)^{ten}$ an (d. h. von X_{m+1} an) bis zum $(m+\nu)^{ten}$ Gliede $(X_{m+\nu})$ hin, minus der Glieder derselben Reihe vom $(m+x+1)^{ten}$ an bis zum $(m+x+\nu)^{ten}$ hin; d. h. er nimmt an

3) $$f_{m+x} = f_m + X_{m+1} + X_{m+2} + X_{m+3} + \cdots + X_{m+\nu}$$
$$- X_{m+x+1} - X_{m+x+2} - X_{m+x+3} - \cdots - X_{m+x+\nu},$$

während er ν unendlich-groß sich denkt; welche Gleichung rechts zwar x Glieder mehr hat als links, nämlich die Glieder $-X_{1+m+\nu} - X_{2+m+\nu} - X_{3+m+\nu} - \cdots - X_{x+m+\nu}$, die aber alle (der Voraussetzung α. zufolge) unendlich-klein sind, während ihre Anzahl eine endliche ist.

Diese Gleichung 3.) läßt nun Euler auch für jeden gebrochenen Werth von x gelten. Dadurch hat er sich aber über das Gesetz des stetigen Uebergangs der Werthe von f_x, von einem ganzen Werth von x zum nächsten, vollkommen entschieden *).

II. Im andern Falle (β.) ist jedoch dieses Gesetz des Uebergangs schon für ganze Werthe von m und x, nicht mehr zuläßig, sobald nicht zugleich die in α) gemachte Voraussetzung statt findet. — Findet also letztere nicht statt, d. h. haben die x Glieder

$$+X_{1+m+\nu} + X_{2+m+\nu} + X_{3+m+\nu} + \cdots + X_{x+m+\nu},$$

welche in 3.) zur Rechten, mit dem (—) Zeichen versehen, mehr vorhanden sind als links, endliche Werthe, so müssen sie wieder eingebracht werden; und dies geschieht dadurch, daß man, da diese Glieder in der Voraussetzung β.) für $\nu = \infty$, einander gleich seyn sollen, noch das xfache eines derselben addirt und zwar in der Form

$$x \cdot X_{m+1} + x \cdot [(X_{m+2} - X_{m+1}) + (X_{m+3} - X_{m+2}) + (X_{m+4} - X_{m+3}) \cdots]$$

wobei die Differenzen der Glieder der in den eckigen Klammern

*) Euler macht von dieser Formel die Anwendung auf die Interpolation der Reihe

$$1, \qquad 1+\tfrac{1}{2}, \qquad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, \qquad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, \; \cdots$$

und analoger Reihen, in welcher die Bedingung, daß X_ν $\left(\text{hier } \frac{1}{\nu}\right)$ für $\nu = \infty$ unendlich-klein wird, erfüllt ist.

befindlichen Reihe (der Voraussetzung β. zufolge) zuletzt unendlich-klein werden.

Für den Fall β.) bildet sich danach das Uebergangsgesetz vom m^{ten} zum $(m+x)^{ten}$ Gliede so:

$$4)\quad f_{m+x} = f_m + X_{m+1} + X_{m+2} + X_{m+3} + X_{m+4} + \cdots + X_{m+\nu}$$
$$- X_{x+m+1} - X_{x+m+2} - X_{x+m+3} - \cdots - X_{x+m+\nu}$$
$$+ x[X_{m+1} + \varDelta X_{m+1} + \varDelta X_{m+2} + \varDelta X_{m+3} + \cdots + \varDelta X_{m+\nu}]$$

für $\nu = \infty$ und $\varDelta m = 1$. — Diese Gleichung läßt nun Euler abermals für jeden gebrochenen Werth von x noch gelten, so daß er dadurch das Gesetz des stetigen Uebergangs der Werthe von f_x, von jedem ganzen Werth von x zum nächsten, wenn es auch aus seinem Standpunkte das natürlichste ist, doch willkührlich festgestellt hat.

Euler setzt noch $m = 0$ (in so ferne er auch noch $f_0 = 0$ voraussetzt), und hat dann

$$5)\quad f_x = (X_1 - X_{x+1}) + (X_2 - X_{x+2}) + (X_3 - X_{x+3}) + \cdots + (X_\nu - X_{x+\nu})$$
$$+ x \cdot (X_1 + \varDelta X_1 + \varDelta X_2 + \varDelta X_3 + \cdots + \varDelta X_\nu)$$

für $\nu = \infty$ und $\varDelta x = 1$. — Diese Funktion von x entspricht allen gemachten Bedingungen, sobald nur die Voraussetzung β.) erfüllt ist.

Euler wendet nun diese Interpolations-Methode (im §. 401. d. a. W.) auf eine Reihe an, deren n^{tes} Glied, der Logarithme von $a^{n|b}$ d. h. $log[a(a+b)(a+2b)+ \cdots +(a+(n-1)b)]$ ist. In diesem Falle ist

$$X_x = L[a+b(x-1)], \quad \text{also} \quad X_1 = La, \quad X_2 = L(a+b),$$
$$X_3 = L(a+2b), \quad X_{x+1} = L(a+bx), \quad X_{x+2} = L(a+b+bx),$$
$$X_{x+3} = L(a+2b+bx), \quad \text{2c. 2c.};$$

endlich $\varDelta X_1 = L\dfrac{a+b}{a}$, $\quad \varDelta X_2 = L\dfrac{a+2b}{a+b}$,

$$\varDelta X_3 = L\frac{a+3b}{a+2b},$$

u. s. w. f.; und die Gleichung 5) liefert daher jetzt unmittelbar für die definirte Funktion:

$$f_x = L\left(\frac{a}{a+bx}\cdot\frac{a+b}{a+b+bx}\cdot\frac{a+2b}{a+2b+bx}\cdots\right)$$
$$+x\cdot L\left(a\cdot\frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+2b}{a+b}\cdot\frac{a+3b}{a+2b}\cdots\right)$$
$$= L\frac{a^{\nu|b}}{(a+bx)^{\nu|b}} + L\left[(a+b\nu)^x\right] = L\left[\frac{a^{\nu|b}}{(a+bx)^{\nu|b}}\cdot(a+b\nu)^x\right],$$

allemal für $\nu = +\infty$ und ganz.

Dieser zuletzt gefundene Logarithme ist also die gesuchte oder vielmehr die aus der allgemeinen, für alle hieher gehörigen Probleme gemachten Annahme hervorgegangene Funktion von x, welche die Eigenschaft hat, daß so oft man statt x eine positive ganze Zahl n setzt, der Werth derselben $= L[a(a+b)(a+2b)\cdots(a+(n-1)b)]$ d. h. $= L(a^{n|b})$ wird.

Der Ausdruck $\frac{a^{\nu|b}}{(a+bx)^{\nu|b}}\cdot(a+b\nu)^x$ ist also danach (von Euler) als Definition von $a^{x|b}$ angenommen, oder vielmehr umgekehrt: Diese Definition von $a^{x|b}$ (welche mit unserer Definition I. des §. 101. ganz gut übereinstimmt, weil hier die Differenz b stillschweigend ebenfalls positiv vorausgesetzt worden ist) enthält zu gleicher Zeit dasselbe Gesetz des Uebergangs von jedem Gliede der Reihe

$$a^{1|b},\quad a^{2|b},\quad a^{3|b},\quad\cdots\quad a^{n|b},$$

zum nächsten, welches Euler in dem Vorstehenden dafür angenommen haben wollte *).

---

*) Der Unterschied ist aber der: Wir haben aus der mittelst der Betrachtung eines Produkts von $x+\nu$ äquidifferenten Faktoren abstrahirten Formel

$$a^{x|b}\cdot(a+bx)^{\nu|b} = a^{x+\nu|b} = a^{\nu+x|b} = a^{\nu|b}\cdot(a+b\nu)^{x|b}$$

mit einem Schlage gefolgert, daß, wenn x wie ν ganz ist und $\nu=\infty$, dann

$$a^{x|b} = \frac{a^{\nu|b}}{(a+bx)^{\nu|b}}\cdot(a+b\nu)^x$$

sey, und daß man daher den Ausdruck rechts, wenn $\nu=\infty$ als Definition von $a^{x|b}$ nehmen könne für jeden reellen Werth von x.

Daß, wegen $\nu=\infty$, statt $(a+b\nu)^x$ auch bloß $(b\nu)^x$ gesetzt werden könne, versteht sich dann wie von selbst.

Im ersten Beispiel zum §. 402. der Euler'schen Diff. Rechnung wendet Euler dasselbe Verfahren auf die Interpolation der specielleren Reihe

$$\begin{cases} \quad 1, \quad 1\cdot 2, \quad 1\cdot 2\cdot 3, \quad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, \quad 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n \\ \text{d. h.}\ 1! \quad 2! \quad 3! \quad 4! \quad n! \end{cases}$$

an und er erhält für die gesuchte Funktion, wenn wir sie allgemein durch x! bezeichnen,

$$x! = \frac{1^{\nu|1}}{(1+x)^{\nu|1}} \cdot (1+\nu)^x \quad \text{für} \quad \nu = \infty,$$

welches mit §. 101. III. übereinstimmt, da für $\nu = \infty$ statt $(1+\nu)^x$ auch ν^x geschrieben werden kann. — Euler schreibt zwar sein Resultat in der Form

$$x! = \frac{1^{1-x}\cdot 2^x}{1+x} \cdot \frac{2^{1-x}\cdot 3^x}{2+x} \cdot \frac{3^{1-x}\cdot 4^x}{3+x} \cdot \frac{4^{1-x}\cdot 5^x}{4+x} \cdot \cdots,$$

allein solche formt sich in die vorangehende Form sogleich um. Indem aber Euler nun in seiner Form $\frac{1}{2}$ statt x schreibt, erhält er

$$(\tfrac{1}{2})! = \frac{1^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{3:2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5:2} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}}{7:2} \cdot \frac{4^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{9:2} \cdot \cdots.$$

Er vergleicht dann das Quadrat hiervon mit dem Wallis'schen Ausdruck für π, nämlich mit

$$\pi = 2 \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdots,$$

und aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke zieht er die Folgerung

$$(\tfrac{1}{2})! = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

nur daß er die Bezeichnung $(\frac{1}{2})!$ oder x! nicht gebraucht, sondern diesen Werth als dasjenige Glied der Reihe

$$1, \quad 1\cdot 2, \quad 1\cdot 2\cdot 3, \quad \cdots \quad 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n$$

findet, welches zu dem Zeiger $\frac{1}{2}$ gehört, während die hier vorstehenden Glieder bezüglich zu den Zeigern 1, 2, 3, ⋯ n gehören.

Wir fügen zu diesem 17ten Kapitel des Euler noch Folgendes hinzu:

α) Die Aufgabe im 2ten Beispiel des §. 402. der Euler'schen Differenzial-Rechnung ist keine andere als: den Werth von $1^{x|2}$ für jeden gebrochenen Werth von x zu bestimmen.

β) Die Aufgabe des folgenden 3ten Beispiels ist keine andere als den Werth von $\frac{n^{x|-1}}{x!}$ für jeden gebrochenen Werth von x zu bestimmen, mag n ganz oder gebrochen seyn.

γ) Im §. 400. d. Calc. diff. wird der Werth von $\frac{a^{x|c}}{b^{x|c}}$ für jeden gebrochenen Werth von x gesucht*).

---

*) Nimmt man die Lehre der Faktoriellen zu Hilfe, so lösen sich diese Euler'schen Aufgaben ungemein einfach. Es ist nämlich

$$1^{x|2} = 2^x \cdot (\tfrac{1}{2})^{x|1} = 2^x \cdot \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}+x}}{\Gamma_{\frac{1}{2}}} = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}+x}.$$

Ferner ist $n^{x|-1} = (n-x+1)^{x|1} = \frac{n!}{(n-x)!}$,

also $\frac{n^{x|-1}}{x!} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} = \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_{n-x+1} \cdot \Gamma_{x+1}}$.

Endlich ist, wenn man c positiv voraussetzt,

$$a^{x|c} = c^x \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{x|1} = c^x \cdot \frac{\left(\frac{a}{c}+x-1\right)!}{\left(\frac{a}{c}-1\right)!};$$

eben so ist dann

$$b^{x|c} = c^x \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{x|1} = c^x \cdot \frac{\left(\frac{b}{c}+x-1\right)!}{\left(\frac{b}{c}-1\right)!},$$

also

$$\frac{a^{x|c}}{b^{x|c}} = \frac{\left(\frac{a}{c}+x-1\right)!\ \left(\frac{b}{c}-1\right)!}{\left(\frac{a}{c}-1\right)!\ \left(\frac{b}{c}+x-1\right)!} = \frac{\Gamma_{(a:c)+x} \cdot \Gamma_{b:c}}{\Gamma_{a:c} \cdot \Gamma_{(b:c)+x}};$$

und somit sind alle 3 Aufgaben auf die Berechnung von Fakultäten oder Gamma-Funktionen zurückgeführt.

§. 128.

Im vorhergehenden Cap. XVI. desselben Werkes differenziirt Euler die inexplicablen Funktionen, worunter er solche Funktionen f_x (von x) versteht, von denen nur Werthe bekannt sind, die solche für gegebene ganze Werthe von x (etwa für $x = 1, 2, 3, 4, 5,$ 2c. 2c.) annehmen. Dies Problem gehört natürlich wiederum zu den völlig unbestimmten, da es unendlich-viele verschiedene Funktionen von x giebt, deren Werthe für $x = 1, 2, 3,$ 2c. bezüglich einander gleich werden, während sie für die Zwischenwerthe von x verschieden ausfallen. Die Lösung des Problems wird also nur möglich, wenn man die Funktion selbst vorher noch willkührlich näher bestimmt, d. h. über das Gesetz des stetigen Fortschreitens der Werthe von f_x noch eine beliebige Annahme trifft. — Euler verfährt dabei wie im folgenden Cap. XVII. bei der Interpolation der Reihen: er denkt sich die bekannten Werthe

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad f_4, \quad f_5, \text{ 2c. 2c.}$$

in eine Reihe geordnet, setzt dabei als bekannt und gegeben voraus

$$f_1 = X_1, \quad f_2 - f_1 = X_2, \quad f_3 - f_2 = X_3, \text{ u. s. w.}$$

besonders aber $f_{n+1} - f_n = X_{n+1}$ als Funktion von n, d. h. während n ganz unbestimmt gedacht ist; — er unterscheidet dann dieselben Fälle α.), β.), γ.) 2c. 2c. des §. 127. und schreibt im Falle α.) dasselbe Gesetz 3.) des §. 127., im Falle β.) dagegen dasselbe Gesetz 4.) §. 127. des Uebergangs von f_m zu dem Gliede f_{m+x} hin, setzt aber dann (indem er solches als stetiges Uebergangsgesetz gelten läßt) dx statt x, und x statt m, wodurch er z. B. im Falle β.) erhält:

$$6) \quad f_{x+dx} = f_x + X_{x+1} + X_{x+2} + X_{x+3} + \cdots$$
$$- X_{x+1+dx} - X_{x+2+dx} - X_{x+3+dx} - \cdots$$
$$+ dx \cdot [X_{x+1} + \Delta X_{x+1} + \Delta X_{x+2} + \Delta X_{x+3} + \cdots]$$
$$\text{für } \Delta x = 1,$$

woraus natürlich sogleich der Differenzial-Koeffizient ∂f_x oder

$$7)\quad \frac{df}{dx} = -\partial(X_{x+1}+X_{x+2}+X_{x+3}+X_{x+4}+\cdots)_x$$
$$+X_{x+1}+\Delta X_{x+1}+\Delta X_{x+2}+\Delta X_{x+3}+\cdots \text{ für } \Delta x = 1$$

sich ergiebt.

Es ist nach dem Vorangegangenen klar, daß, wenn Euler dies auf die Differenzlirung derjenigen inexplicablen Funktion anwendet, welche für $x = 1, 2, 3, 4, \cdots$ bezüglich die Werthe

$$L1,\quad L(1\cdot 2),\quad L(1\cdot 2\cdot 3),\quad L(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4),\ \text{rc. rc.}$$

hat, — die von ihm angenommene Funktion f_x keine andere als $L(x!)$ ist; während man $X_x = Lx$, also

$$\partial(X_{x+1}+X_{x+2}+X_{x+3}+\cdots) = \frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+x}+\frac{1}{4+x}+\cdots,$$

ferner

$$\Delta X_{x+1} = L(2+x)-L(1+x)$$
$$= L\frac{2+x}{1+x} = L\left(1+\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+x}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}+\cdots$$

$$\Delta X_{x+2} = L\frac{3+x}{2+x} = L\left(1+\frac{1}{2+x}\right)$$
$$= \frac{1}{2+x}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{(2+x)^2}+\tfrac{1}{3}\frac{1}{(2+x)^3}+\cdots$$

u. s. w. f.; und die Formel 7.) giebt daher sogleich

$$8)\quad \partial(Lx!)_x = L(1+x)-\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\frac{1}{(3+x)^2}+\cdots\right]$$
$$+\tfrac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(2+x)^3}+\frac{1}{(3+x)^3}+\cdots\right]$$
$$-\tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{1}{(2+x)^4}+\frac{1}{(3+x)^4}+\cdots\right]$$
$$+\ \text{rc. rc.}$$

welches Resultat (rechts) von Euler als Differenzial-Koeffizient für seine sogenannte inexplicable Funktion (welche jedoch mit un-

ferem $L(x!)$, wie wir im Vorangegangenen gezeigt haben, übereinstimmt) gefunden hat.

Geht man aber von der Formel 5.) aus, welche von Euler für den Fall β.) als Repräsentant der inexplicablen Funktion gefunden ist, und entwickelt man die Funktionen X_{x+1}, X_{x+2}, X_{x+3}, 2c. 2c. nach Potenzen von x, so giebt dies, in der Anwendung auf den vorliegenden speciellen Fall, wo $X_x = Lx$ ist, sogleich

$$9)\quad L(x!) = \Big(L\tfrac{2}{1} + L\tfrac{3}{2} + L\tfrac{4}{3} + \cdots + L\frac{\nu+1}{\nu} - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{\nu}\Big)\cdot x + \tfrac{1}{2}S_2\cdot x^2 - \tfrac{1}{3}S_3\cdot x^3 + \tfrac{1}{4}S_4\cdot x^4 - \tfrac{1}{5}S_5\cdot x^5 + \cdots,$$

wenn

S_μ die Summe $1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} +$ in inf.

vorstellt; wie solches im 2ten Beispiel zu §. 384. des angeführten Werkes zu finden ist.

Diese Formel 9.) ist aber keine andere als die X. unseres §. 126. — Euler differenziirt (am selbigen Orte) sogleich noch diese Reihe in 9.), nachdem er vorher den Koeffizienten von x^1 berechnet und durch $-C$ bezeichnet, und er erhält

$$10)\qquad \partial[L(x!)] = -C + S_2\cdot x - S_3\cdot x^2 + S_4\cdot x^3 - \cdots;$$

und diese Reihe rechts verwandelt er sogleich wieder in

$$11)\quad \partial[L(x!)] = -C + \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\frac{\tfrac{1}{2}x}{1+\tfrac{1}{2}x} + \tfrac{1}{3}\frac{\tfrac{1}{3}x}{1+\tfrac{1}{3}x} + \cdots$$

eine Formel, die hier im §. 121. N. 30. auf ganz andern Wegen ebenfalls gefunden worden ist, und natürlich auch aus §. 126. X. eben so hervorgeht, wie Euler am angeführten Orte sie aus der vorstehenden N. 10.) ableitet.

Anmerkg. Wir glauben in den letztern beiden Paragraphen gezeigt zu haben:

1) daß Euler's inexplicable Funktionen f_x von ihm nach

Belieben angenommen worden sind, der einzigen Bedingung entsprechend, daß sie für gewisse ganze Werthe von x gegebene Werthe annehmen, während er beliebig viele andere Funktionen hätte finden können, welche für ganze Werthe von x denselben Bedingungen genügen, aber für jeden gebrochenen Werth von x im Werthe von einander abweichen;

2) daß die von Euler im Cap. XVI. seines calc. diff. gewählte, seine inexplicable, ersetzende Funktion genau die ist, welche er im nächsten Kapitel XVII. seines Calc. diff. zum Interpoliren gegebener Werthe derselben, letztere als in eine Reihe gebracht angesehen, ebenfalls willkührlich dadurch wählt, daß er irgend ein passendes (und das einfachste) Gesetz des Uebergangs vom m^{ten} Glied zum $m+n^{ten}$ Gliede aufstellt, dasselbe Gesetz aber dann als stetiges Uebergangsgesetz annimmt;

3) daß nach diesem Verfahren die Euler'sche inexplicable Funktion $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots x$ genau übereinstimmt, mit der von uns hier definirten Fakultät $x!$ (also auch, so lange $1+x$ positiv ist, mit Γ_{1+x}), folglich auch alle die Eigenschaften dieser letztern hat. Dem Euler konnten, von seinem Gesichtspunkte aus, diese Eigenschaften sich unmöglich so leicht bemerkbar machen, obgleich es jetzt nicht schwer ist, sie auch von seinem Gesichtspunkte aus zu erhalten;

4) daß, sobald dieses letztere festgestellt ist, man sagen kann, daß Euler die Formeln, nach denen wir jetzt die Logarithmen der Fakultäten oder der Gamma-Funktionen berechnen, bereits alle schon gegeben hat.

Indem wir jetzt noch die Verfahrungsarten betrachten, welche Kramp angewandt hat, um $a^{x|r}$ und also auch $x!$, so wie deren Logarithmen in Reihen zu verwandeln, nach denen sie sich berechnen lassen, werden wir ebenfalls uns bemühen, nur den Geist festzuhalten, in der Ausführung aber stets größere

Gründlichkeit mit größerer Einfachheit der Darstellung zu vereinigen suchen.

§. 129.

Aufgabe. Suchen wir jetzt die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, 2c. der Gleichung

1) $1^{m|r} = 1+\mathfrak{A}\cdot r+\mathfrak{B}\cdot r^2+\mathfrak{C}\cdot r^3+\mathfrak{D}\cdot r^4+\cdots,$

welche Funktionen von m seyn werden, näher zu bestimmen, während wir r positiv voraussetzen (vgl. §. 124. δ.)

Auflösung. Man verfahre genau wie im §. 124. — Es ist

2) $1^{m+1|r} = 1^{m|r}\cdot(1+mr);$

wenn man aber in der Gleichung 1.) statt m jetzt $m+1$ setzt, so geht hervor:

3) $1^{m+1|r} = 1+\begin{pmatrix}\mathfrak{A}\\+\Delta\mathfrak{A}\end{pmatrix}\cdot r+\begin{pmatrix}\mathfrak{B}\\+\Delta\mathfrak{B}\end{pmatrix}\cdot r^2+\begin{pmatrix}\mathfrak{C}\\+\Delta\mathfrak{C}\end{pmatrix}\cdot r^3+\cdots,$

wo die Differenzen $\Delta\mathfrak{A}$, $\Delta\mathfrak{B}$, $\Delta\mathfrak{C}$, 2c. der Differenz $\Delta m = 1$ angehören. — Multiplicirt man nun die 1.) mit $1+mr$, so ergiebt sich vermöge der 2.)

4) $1^{m+1|r} = 1+\begin{pmatrix}\mathfrak{A}\\+m\end{pmatrix}\cdot r+\begin{pmatrix}\mathfrak{B}\\+\mathfrak{A}m\end{pmatrix}\cdot r^2+\begin{pmatrix}\mathfrak{C}\\+\mathfrak{B}m\end{pmatrix}\cdot r^3+\cdots.$

Aus der Vergleichung der beiden Reihen in 3.) und 4.) zur Rechten, ergiebt sich nun (für $\Delta m = 1$)

$\Delta\mathfrak{A} = m$, $\Delta\mathfrak{B} = \mathfrak{A}m$, $\Delta\mathfrak{C} = \mathfrak{B}m$, $\Delta\mathfrak{D} = \mathfrak{C}m$, u. s. w.,

also $\mathfrak{A} = c+\Sigma(m)$, $\mathfrak{B} = c'+\Sigma(\mathfrak{A}m)$, $\mathfrak{C} = c''+\Sigma(\mathfrak{B}m)$,

u. s. w. f., wo c, c', c'' 2c. 2c. die Konstanten sind, welche aus speciellen Werthen von m ihre Bestimmung erhalten müssen. — Weil aber für $m = 0$, $1^{m|r} = 1$ ist, also (nach 1.) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} =$ 2c. $= 0$ werden muß, so sind die Konstanten c, c', c'', 2c. 2c. richtig bestimmt, sobald man in die Ausdrücke für $\Sigma(m)$, $\Sigma(\mathfrak{A}m)$, $\Sigma(\mathfrak{B}m)$, $\Sigma(\mathfrak{C}m)$, 2c. kein Glied aufnimmt, welches nicht m zum Faktor hat.

Es ist nun unschwer mit Zuziehung der Resultate des §. 67. die Koeffizienten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. ꝛc. als endliche Reihen, die nach Potenzen von m fortlaufen, wirklich herzustellen, während man weiß, daß auch die als Endresultat gefundene Reihe 1.) als eine solche angesehen werden kann, zu welcher, wo man sie abbricht, noch ein Ergänzungsglied hinzutritt, welches zwischen zu bestimmenden Grenzen liegt.

Man kann aber dieselben Koeffizienten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. ohne Zuziehung der endlichen Summen-Rechnung direkt auf folgende Weise finden:

Multiplicirt man nämlich die Gleichung 1.) mit a^m und setzt man r statt ra, also $\frac{r}{a}$ statt r, und setzt man a, also auch das neue r positiv voraus, so erhält man

5) $$a^{m|r} = a^m + \mathfrak{A}\cdot a^{m-1}\cdot r + \mathfrak{B}\cdot a^{m-2}\cdot r^2 + \mathfrak{C}\cdot a^{m-3}\cdot r^3 + \cdots.$$

Man kann sich also die Aufgabe gleich so stellen, daß man die Koeffizienten

$$K_1 = \mathfrak{A}, \quad K_2 = \mathfrak{B}, \quad K_3 = \mathfrak{C}, \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

so sucht, daß

6) $$a^{m|r} = S[K_b \cdot a^{m-b} r^b]$$

wird, wobei man offenbar $K_0 = 1$ hat.

Setzt man nun hier herein $a+r$ statt a, und wendet man auf $(a+r)^{m-b}$ den binomischen Lehrsatz an, so daß man hat:

7) $$(a+r)^{m-b} = S\left[\frac{(m-b)^{c|-1}}{c!}\cdot a^{m-b-c}\cdot r^c\right],$$

so geht die 6.) sogleich über in

8) $$(a+r)^{m|r} = S\left[\frac{(m-b)^{c|-1}}{c!}\cdot K_b\cdot a^{m-b-c}\cdot r^{b+c}\right].$$

Nimmt man nun die Gleichung

9) $$a\cdot(a+r)^{m|r} = a^{m|r}\cdot(a+mr)$$

zu Hilfe, substituirt man in sie die Reihen aus 6.) und 8.),

und vergleicht man dann links und rechts die Koeffizienten $a^{m-\mu} \cdot r^{\mu}$, so erhält man das Resultat:

$$10) \qquad \mu \cdot K_{\mu} = \underset{b+c=\mu-1}{S}\left[\frac{(m-\mu)^{c+2|1}}{(c+2)!} \cdot K_{\mu-1-c}\right],$$

wodurch jeder Koeffizient K_{μ} in alle seine vorhergehenden gedrückt sich sieht, während $K_0 = 1$ ist. — Für $\mu = 1, 2, 3, 4,$ ꝛc. ꝛc. sehen die einzelnen Gleichun so aus:

$$11) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{(m-1)m}{1 \cdot 2}; \\ 2 \cdot K_2 = \frac{(m-2)(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot K_1 + \frac{(m-2)(m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \\ 3 \cdot K_3 = \frac{(m-3)^{2|1}}{2!} \cdot K_2 + \frac{(m-3)^{3|1}}{3!} \cdot K_1 + \frac{(m-3)^{4|1}}{4!}; \end{cases}$$

u. s. w. f. *)

---

*) Bezeichnet man durch die kleinen Buchstaben k_1, k_2, k_3, bezüglich die Koeffizienten von m^1 in den verschiedenen Entwickelungen Koeffizienten K_1, K_2, K_3, ꝛc. ꝛc. nach ganzen Potenzen von m, so findet man offenbar

$$k_c = \frac{K_c}{m} \text{ für } m = 0 \text{ genommen.}$$

Dividirt man daher die Gleichungen 11.) und 10.) durch m, und s man nachgehends $m = 0$, so erhält man

$$k_1 = -\tfrac{1}{2},$$

$$2 \cdot k_2 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot k_1 + \tfrac{1}{3}, \quad \text{d. h.} \quad k_2 = -\tfrac{1}{12};$$

$$3 \cdot k_3 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot k_2 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot k_1 - \tfrac{1}{4}, \quad \text{d. h.} \quad k_3 = 0;$$

$$4 \cdot k_4 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot k_3 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot k_2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot k_1 + \tfrac{1}{5}, \quad \text{d. h.} \quad k_4 = \tfrac{1}{30};$$

u. s. w. f. und allgemein (aus 10.)

$$(\mathfrak{C}) \cdots \quad \mu \cdot k_{\mu} = \underset{b+c=\mu-2}{S}\left[(-1)^c \cdot \frac{\mu^{c+2|-1}}{(c+2)!} \cdot k_{\mu-1-c}\right] + (-1)^{\mu} \cdot \frac{1}{\mu+1}.$$

Die Nummern 6.) und 10.) (oder 11.) in Verbindung, geben nun das Verlangte. — Das Resultat ist aber unter der Voraussetzung entwickelt, daß a und r positiv gedacht sind.

Für $a = 1$ erhält man also hieraus

12) $$1^{m|r} = S[K_b \cdot r^b],$$

während $K_0 = 1$ und K_1, K_2, 2c. aus den Gleichungen 10.) oder 11.) bestimmt werden.

Anmerkg. Kramp hat die Koeffizienten der hier zuletzt gefundenen Reihe soweit umgeformt, um mittelst dieser Reihe $1^{m|r}$ für ziemlich kleine Werthe von r möglichst bequem zu berechnen. Obgleich aber sich, durch Einführung einer beliebig großen positiven ganzen Zahl n, vermöge der Gleichung

$$a^{m|r} = \frac{a^{n|r}}{(a+mr)^{n|r}} \cdot (a+nr)^{m|r}$$

$$= \frac{a^{n|r}}{(a+mr)^{n|r}} \cdot (a+nr)^m \cdot 1^{m\left|\frac{r}{a+nr}\right.}$$

Aber eben wegen der Bedeutung der kleinen k_1, k_2, k_3, 2c. 2c., ist

$$k_1 \cdot r + k_2 \cdot r^2 + k_3 \cdot r^3 + k_4 \cdot r^4 + \cdots$$

der Koeffizient von m^1 in der Entwickelung von $1^{m|r}$ nach ganzen Potenzen von m, wie aus N. 6. erhellt, wenn man daselbst $a = 1$ setzt. Da nun derselbe Koeffizient (nach §§. 124. 125.)

$$= -\mathfrak{L}r \text{ ist, d. h. } = -\tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \cdot r^2 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}_3 \cdot r^3 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{B}_5 \cdot r^6 + \cdots,$$

so folgt aus der Vergleichung dieser beiden Reihen:

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}, \qquad k_{2\nu+1} = 0$$

und

$$2\nu \cdot k_{2\nu} = (-1)^\nu \cdot \mathfrak{B}_{2\nu-1},$$

unter ν jede positive ganze Zahl verstanden. — Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung (☾), so erhält man abermals die Gleichung §. 67. IV. zwischen den Bernoulli'schen Zahlen. Um jedoch die Rechnung selbst mit nur einigen Federstrichen beendigen zu können, muß man sich der in der Vorrede erwähnten Aggregaten-Rechnung bedienen, welche vorzüglich in dem Rechnen mit den, den allgemeinen Gliedern untergesetzten (Bedingungs-) Gleichungen besteht.

(in welcher $a^{n|r}$ und $(a+mr)^{n|r}$ als Produkte äquidifferenter Faktoren eine nicht zu große logarithmische Rechnung erfordern) die Berechnung von $a^{m|r}$ auf die von $1^{m|\frac{r}{a+nr}}$ sich zurückzieht, in welcher $\frac{r}{a+nr}$ beliebig klein gemacht werden kann*), — so hat Kramp doch selbst vorgezogen, lieber die Berechnung des Logarithmen von $a^{m|r}$ eintreten zu lassen, als $a^{m|r}$ selbst zu berechnen.

§. 130.

Dabei ist Kramp schon von der Ansicht ausgegangen, daß man, um $log(a^{x|r})$ zu entwickeln, zuvor $\partial(log\, a^{x|r})_x$ entwickeln müsse, um nachgehends durch Integration (nach x) den gesuchten Logarithmen selbst zu haben. — Darum sucht er vor allen Dingen den Differenzial-Koeffizienten $\partial(a^{x|r})_x$.

Läßt man aber x um das unendlich-kleine dx wachsen, so erhält man den zugehörigen unendlich-kleinen Zuwachs

1) $d(a^{x|r}) = a^{x+dx|r} - a^{x|r}$;

aber es ist (nach §. 102. V.)

2) $a^{x+dx|r} = a^{x|r} \cdot (a+rx)^{dx|r}$

und (nach 125. II.), so lange $a+rx$ eben so wie r positiv sind,

3) $(a+rx)^{dx|r} = 1 + \left[L(a+rx) - \mathfrak{L}\frac{r}{a+rx}\right] \cdot dx + \mathfrak{A} \cdot (dx)^2 + \cdots$.

Aus diesen 3 Gleichungen folgt also, wenn r und $a+rx$ positiv sind,

I. $\frac{d(a^{x|r})}{dx}$ d. h. $\partial(a^{x|r})_x = a^{x|r} \cdot \left[L(a+rx) - \mathfrak{L}\frac{r}{a+rx}\right]$,

---

*) Nach dieser Gleichung würde z. B.

$$\Gamma_c = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{c \cdot (c+1) \cdots (c+n-1)} \cdot (1+n)^{c-1} \cdot 1^{c-1|\frac{1}{1+n}},$$

seyn, während man n beliebig groß, nur positiv ganz, nehmen könnte.

woraus, wenn man durch $a^{x|r}$ dividirt,

II. $$\partial(\log a^{x|r})_x = L(a+rx) - \mathfrak{L}\varrho$$

hervorgeht, während

4) $$\varrho = \frac{r}{a+rx}, \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{\varrho} - \frac{a}{r}$$

und (wie im §. 125. I.)

III. $$\mathfrak{L}\varrho = \tfrac{1}{2}\varrho + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \cdot \varrho^2 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}_3 \cdot \varrho^4 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{B}_5 \cdot \varrho^6 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{B}_7 \cdot \varrho^8$$
$$+ (-1)^{2\mu-1} \cdot \frac{1}{2\mu}\mathfrak{B}_{2\mu-1} \cdot \varrho^{2\mu} + (-1)^{\mu} \cdot k \cdot \frac{1}{2\mu}\mathfrak{B}_{2\mu-1} \cdot \varrho^{2\mu}$$

angenommen worden und k an sich, <1 ist.

Nun ist aber

5) $$\int L(a+rx) \cdot dx = x(-1+Lr) + \left(\frac{a}{r}+x\right) \cdot L\left(\frac{a}{r}+x\right)$$

und wegen

6) $$\partial x_\varrho = -\frac{1}{\varrho^2},$$

7) $$\int \mathfrak{L}\varrho \cdot dx = \int \mathfrak{L}\varrho \cdot \partial x_\varrho \cdot d\varrho = -\int \frac{1}{\varrho^2} \cdot \mathfrak{L}\varrho \cdot d\varrho.$$

Multiplicirt man also die III. mit $\frac{1}{\varrho^2}$ und integrirt man dann nach ϱ, so erhält man (aus 7.)

8) $$-\int \mathfrak{L}\varrho \cdot dx = +\tfrac{1}{2}L\varrho + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \cdot \varrho - \frac{1}{3 \cdot 4}\mathfrak{B}_3 \cdot \varrho^3 + \frac{1}{5 \cdot 6}\mathfrak{B}_5 \cdot \varrho^5 - \cdots.$$

Integrirt man also die II. nach x, und setzt man noch (wie im §. 125. V.)

IV. $$\mathfrak{G}\varrho = \frac{1}{1 \cdot 2}\mathfrak{B}_1 \cdot \varrho - \frac{1}{3 \cdot 4}\mathfrak{B}_3 \cdot \varrho^3 + \frac{1}{5 \cdot 6}\mathfrak{B}_5 \cdot \varrho^5 - \cdots$$
$$+ (-1)^{\mu-1}\frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu-1)(2\mu)} \cdot \varrho^{2\mu} + (-1)^{\mu} k \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2\mu-1}}{(2\mu-1)(2\mu)} \cdot \varrho^{2\mu},$$

wo k an sich <1 ist, — so erhält man sogleich

$$\text{V.}\quad log(a^{x|r}) = -x + x\cdot Lr + \left(\frac{a}{r}+x-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+x\right)$$
$$+\mathfrak{S}\frac{r}{a+rx}+C,$$

welche Konstante C eine Funktion von a und r seyn kann und dadurch näher bestimmt wird, daß man statt x entweder Null oder irgend eine positive ganze Zahl n setzt, weil dann $a^{x|r}$ entweder in 1, oder in a, oder in $a(a+r)\cdots[a+(n-1)r]$ übergeht.

Für $x=0$ bestimmt sich die Konstante C, wenn man links den einzigen Werth $L(a^{x|r})$ im Auge behält,

$$\text{9)}\qquad C = -\left(\frac{a}{r}-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\frac{a}{r} - \mathfrak{S}\frac{r}{a},$$

so daß dann die V. übergeht in

$$\text{VI.}\quad L(a^{x|r}) = -x + x\cdot Lr + \left(\frac{a}{r}+x-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+x\right)$$
$$-\left(\frac{a}{r}-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\frac{a}{r} + \mathfrak{S}\frac{r}{a+rx} - \mathfrak{S}\frac{r}{a},$$

wobei jedoch r und $a+rx$ positiv vorausgesetzt werden müssen *).

Anmerkg. 1. Die Reihen $\mathfrak{L}\varrho$ und $\mathfrak{S}\varrho$ (die Kramp bezüglich durch $\Lambda\varrho$ und $\Gamma\varrho$ bezeichnet hat) hängen durch die nachstehenden Gleichungen zusammen, nämlich

$$\mathfrak{L}\varrho = \varrho^2\cdot\partial(\mathfrak{S}\varrho)_\varrho + \tfrac{1}{2}\varrho$$

oder

$$\mathfrak{S}\varrho = \int_0^\varrho \left(-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\cdot\mathfrak{L}\varrho\right)\cdot d\varrho.$$

Anmerkg. 2. Die Resultate der beiden letztern Paragraphen hat Kramp zuerst gegeben. Unsere Darstellung ist jedoch

---

*) Setzt man aber in der obigen Formel V. $a=r=1$ und $z-1$ statt x, so hat man augenblicklich wieder das Resultat IV. des §. 125.; während die hiesige VI. für dieselben Werthe von a, r und x, sobald man nur statt $\mathfrak{S}1$ seinen Werth aus der Anmerkg. zum §. 125. substituirt, wiederum in die VI. des §. 125. übergeht.

von der des Kramp manchmal nicht unbedeutend verschieden, und wir hoffen theils einfacher, theils viel gründlicher; indem wir zugleich alle Irrthümer des Kramp vermieden und auch manches Neue hinzugefügt zu haben glauben.

Es bedient sich aber Kramp dieser Formeln und namentlich der Formel VI. auf eine doppelte Weise, einmal um $L(a^{x|r})$ für einen gebrochenen Werth von x danach zu berechnen, indem man $\mathfrak{G}$ aus der Gleichung IV. direkt berechnet (sowohl $\mathfrak{G}\frac{r}{a}$, als auch $\mathfrak{G}\frac{r}{a+rx}$) wenn $\frac{r}{a}$ und $\frac{r}{a+rx}$ bereits klein sind; — dann aber bedient er sich auch derselben Formel VI., um $\mathfrak{G}\frac{r}{a}$ und wohl auch $\mathfrak{G}\frac{r}{a+rx}$ daraus zu berechnen, wenn $\frac{r}{a}$ oder auch $\frac{r}{r+ax}$ noch nicht klein genug ist, indem man statt x eine ganze Zahl ν groß genug nimmt, damit $\frac{r}{a+\nu r}$ klein genug wird, um $\mathfrak{G}\frac{r}{a+\nu r}$ direkt aus der Gleichung IV. bequem berechnen zu können. Die Gleichung VI. liefert dann $\mathfrak{G}\frac{r}{a}$ in das bereits direkt berechnete $\mathfrak{G}\frac{r}{a+\nu r}$ und in $L(a^{\nu|r})$ d. h. $La+L(a+r)+L(a+2r)+\cdots+L(a+(\nu-1)r)$ ausgedrückt, während jedoch a und $a+(\nu-1)r$ positiv gedacht werden müssen. — Das ähnliche Verfahren tritt ein, um auch $\mathfrak{G}\frac{r}{a+rx}$ zu berechnen, wenn $\frac{r}{a+rx}$ noch nicht klein genug ist.

Um dies in Formeln auszudrücken, muß man zuerst ν statt x in die VI. substituiren; dies giebt

$$1)\qquad L(a^{\nu|r}) = -\nu+\nu\cdot Lr-\left(\frac{a}{r}-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\frac{a}{r}$$
$$+\left(\frac{a}{r}+\nu-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+\nu\right)-\mathfrak{G}\frac{r}{a}+\mathfrak{G}\frac{r}{a+r\nu};$$

hierauf setzt man hier herein $a+rx$ statt a und μ statt ν, wodurch man erhält:

$$2)\quad L[(a+rx)^{\mu|r}] = -\mu+\mu \cdot Lr - \left(\frac{a}{r}+x-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+x\right)$$
$$+\left(\frac{a}{r}+x+\mu-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+x+\mu\right) - \mathfrak{S}\frac{r}{a+rx} + \mathfrak{S}\frac{r}{a+rx+r\mu}.$$

Subtrahirt man nun die Gleichung 1.) von der VI. und addirt man nachgehends die 2.) noch hinzu, so giebt dies

$$\text{VII.}\quad L(a^{x|r}) = L(a^{\nu|r}) - L(a+rx)^{\mu|r} + \nu - \mu - x + (-\nu+\mu+x)\cdot Lr$$
$$-\left(\frac{a}{r}+\nu-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+\nu\right) + \left(\frac{a}{r}+x+\mu-\tfrac{1}{2}\right)\cdot L\left(\frac{a}{r}+x+\mu\right)$$
$$-\mathfrak{S}\frac{r}{a+r\nu} + \mathfrak{S}\frac{r}{a+rx+r\mu};$$

wo ν und μ zwei beliebige positive ganze Zahlen sind, die (nach Kramp) selten größer als 6 genommen zu werden brauchen, um die Werthe von $\mathfrak{S}\frac{r}{a+r\nu}$ und $\mathfrak{S}\frac{r}{a+rx+r\mu}$ mittelst zweier, höchstens dreier Glieder der Reihe $\mathfrak{S}\varrho$ (in IV.) bis auf 9 Decimalstellen genau berechnen zu können. Kramp setzt aber bei dieser letzteren Behauptung noch mehreres stillschweigend voraus, darunter offenbar auch, daß a positiv ist.

Derselbe bestimmt auch bei dieser Gelegenheit die Werthe von $\mathfrak{S}1$, $\mathfrak{S}2$, $\mathfrak{S}\frac{2}{2n+1}$ und $\mathfrak{S}\frac{1}{n+1}$, wie wir solches in der Anmerkung zu §. 125. gethan haben; sein Verfahren wird jedoch viel verwickelter, da er nicht die geeignete einfachste Formel dazu verwendet.

Bessel hat nach Kramp's Verfahren Tabellen der Fakultäten berechnet. — Auch Legendre (Exercises etc. T. I. p. 302.) hat $x!$ von $x=0$ bis $x=1$ in Tabellen mit 7 Decimalen berechnet und später (Exercises etc. T. II. pag. 85.) in 12 Decimalen.

Druck von Gebr. Unger in Berlin.